Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 2–2010 — Vicente Parot

Documento #9

Interrogación 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] **Laplace.** Determine la transformada de Laplace y región de convergencia de la señal cuya transformada de Fourier es

$$G(u) = \frac{1 - 2\pi^2 u^2}{1 + 4\pi^4 u^4}$$

Resultado: Sea $f(x)$ la señal con transformada de Laplace $F(s)$ y de Fourier $G(u)$ enunciada. Se sabe que la transformada de Fourier se tiene al evaluar $s = 0 + i2\pi u$ en la transformada de Laplace. Se puede formar esta expresión en $G(u)$ y luego reemplazarla, o bien reemplazar directamente $u = s/i2\pi$. Ambos producen $F(s)$.

$$\begin{aligned} G(u) = F(0 + i2\pi u) &= \frac{1 - 2\pi^2 u^2}{1 + 4\pi^4 u^4} \\ &= \frac{4 + 2(0 + i2\pi u)^2}{4 + (0 + i2\pi u)^4} \\ &= \frac{1 - 2\pi^2 (\frac{s}{i2\pi})^2}{1 + 4\pi^4 (\frac{s}{i2\pi})^4} \\ F(s) &= \frac{4 + 2s^2}{4 + s^4} \end{aligned}$$

Para encontrar la región de convergencia, se debe estudiar los polos de $F(s)$.

$$\frac{4 + 2s^2}{4 + s^4} = \frac{2s^2 + 4}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

$F(s)$ tiene polos en $s = 1 \pm i$, $s = -1 \pm i$, los cuales pueden estar en un borde de la región de convergencia pero no adentro. Como $f(x)$ tiene además transformada de Fourier $G(u)$, entonces el eje imaginario debe estar contenido en la región de convergencia, por lo que ésta es $-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$, es decir, $|\sigma| < 1$.

2. [4 ptos] **Sistema Continuo.** El inverso $\mathcal{H}_2$ de un sistema LTI $\mathcal{H}_1$ se define como un sistema que cuando se conecta a continuación de $\mathcal{H}_1$, ambos tienen una respuesta al impulso total que es un impulso, es decir, $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$. Si $\mathcal{H}_1$ es un sistema causal dado por

$$H_1(s) = \frac{s + K_1}{s + K_2}$$

donde K_1 y K_2 son reales,

   a) [2 ptos] ¿Qué condiciones de K_1 y K_2 permiten que $\mathcal{H}_1$ sea estable?

   b) [2 ptos] Suponiendo que las condiciones en *a*) se cumplen, ¿Qué condiciones de K_1 y K_2 permiten que el sistema inverso $\mathcal{H}_2$ (también causal) sea también estable?

   Resultado:

   a) Ya que $\mathcal{H}_1$ es causal, entonces para que sea estable la región de convergencia debe incluir al eje imaginario, el polo $s = -K_2$ debe ser negativo por lo que se requiere $K_2 > 0$. Respecto a K_1 no hay ninguna restricción. También es posible el caso $K_1 = K_2$, para cualquier valor equivalente de las constantes el sistema es estable porque la región de convergencia incluye al eje imaginario.

   b) El sistema inverso debe tener

$$H_2(s) = \frac{s + K_2}{s + K_1}$$

   de modo que $H_1(s)H_2(s) = 1$. Si $\mathcal{H}_2$ es causal, para que también sea estable se requiere $K_1 > 0$ análogamente al caso anterior. Para el caso $K_1 = K_2$, el sistema es estable sin otros requisitos.

3. [4 ptos] **Laplace Inversa.** Determine la transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{s^4 + s^3 - 2s^2 - 4}{s^3 + s^2 - 4s - 4} \qquad -1 < \sigma < 2$$

   Resultado: Como el orden del numerador es mayor que el denominador, se puede usar división larga para reducirlo:

$$\frac{s^4 + s^3 - 2s^2 - 4}{s^3 + s^2 - 4s - 4} = s + \frac{2s^2 + 4s - 4}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

   La región de convergencia indica que debe haber polos con parte real -1 y 2 repectivamente. Esto se puede aprovechar para calcular la expansión en fracciones parciales.

$$s + \frac{2s^2 + 4s - 4}{s^3 + s^2 - 4s - 4} = s - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2}$$

   La región de convergencia indica si los términos son causales o no. La transformada inversa es

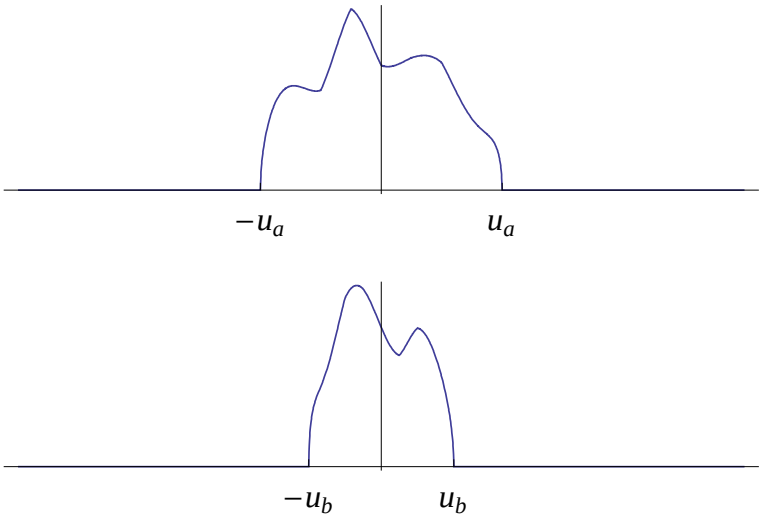
$$\begin{aligned} f(t) &= \delta'(t) - e^{-2t}\sqcap(t) + 2e^{-t}\sqcap(t) - e^{2t}\sqcap(-t) \\ &= \delta'(t) - e^{-2|t|} + 2e^{-t}\sqcap(t) \end{aligned}$$

4. [6 ptos] **Muestreo.** Las señales $a(t)$ y $b(t)$ pueden ser reconstruidas a partir de sus muestras si éstas se obtienen a intervalos regulares T_a y T_b respectivamente. ¿Con qué intervalo se debe muestrear la señal $c(t) = a(t)b(t)$ para asegurar que no se pierda información al hacerlo?

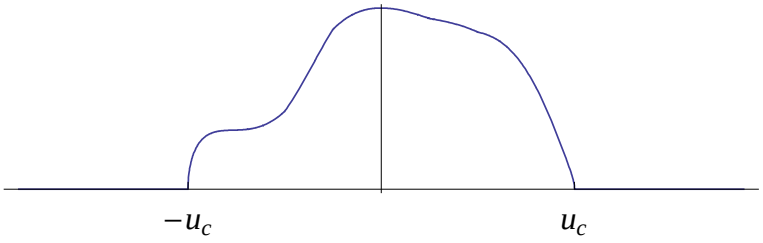
   Resultado: Si las señales $a(t)$ y $b(t)$ pueden ser reconstruidas a partir de sus muestras a intervalos T_a y T_b, significa que satisfacen el criterio de Nyquist, por lo que no tienen frecuencias más altas que

$$|u| < u_a = \frac{1}{2T_a} \quad \text{y} \quad |u| < u_b = \frac{1}{2T_b}$$

   De este modo, la magnitud de sus transformadas pueden verse como los de las siguientes figuras:



   La convolución entre ellas, dada por el producto de las señales en el tiempo, será cero para $|u| > u_c = u_a + u_b$



   Finalmente, el intervalo de muestreo para que la señal $c(t)$ no pierda información está dado también por el criterio de Nyquist

$$T < T_c = \frac{1}{2u_c} = \frac{1}{2(u_a + u_b)} = \frac{1}{2(\frac{1}{2T_a} + \frac{1}{2T_b})} = \frac{T_a T_b}{T_a + T_b}$$

5. [6 ptos] **Sistema discreto.** Considere un sistema discreto con respuesta al impulso $h[n] = e^{-n}\sqcap[n]$. Exprese el sistema como una ecuación de diferencias que relacione la salida actual $y[n]$ del sistema con la entrada actual $x[n]$ y una cantidad finita de entradas y/o salidas anteriores. Considere $\sqcap[0] = 1$.

   Resultado: La salida del sistema es la convolución lineal de la entrada con la respuesta al impulso:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-(n-m)}\sqcap[n-m] \end{aligned}$$

   Si se usa un cambio de variables $k = n - m$, se tiene que $m = n - k$ y la salida está en función de la entrada y entradas anteriores:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]e^{-k}\sqcap[k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]e^{-k} \end{aligned}$$

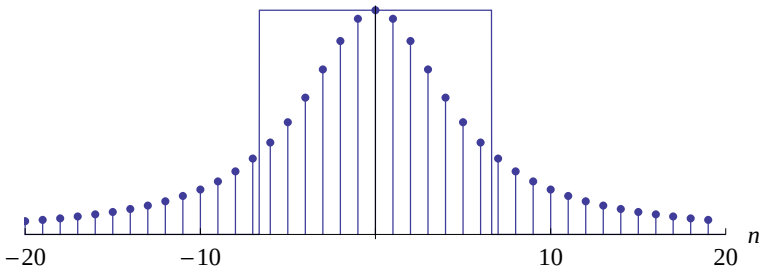
   Para resolver la suma infinita,

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]e^{-k} \\ e^{-1}y[n-1] &= \sum_{k=0}^{\infty} x[n-(k+1)]e^{-(k+1)} \\ e^{-1}y[n-1] &= \sum_{k=1}^{\infty} x[n-(k)]e^{-(k)} \\ y[n] - e^{-1}y[n-1] &= \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]e^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} x[n-k]e^{-k} \\ y[n] - e^{-1}y[n-1] &= x[n-0]e^{-0} \\ y[n] &= e^{-1}y[n-1] + x[n] \end{aligned}$$

6. [4 ptos] **DFT.** Se define el ancho equivalente $\mathcal{B}$ de una señal periódica discreta como la suma de sus elementos en un período, dividida por su valor en el origen de la secuencia.

$$\mathcal{B}\{\tilde{g}\} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{g}[n]}{\tilde{g}[0]}$$

Como ejemplo, se muestra un período de una señal discreta, superpuesto con un rectángulo de altura igual a su valor en el origen y base igual al ancho equivalente:



Demuestre que para un par DFT cualquiera $\tilde{f}[n] \longrightarrow \tilde{F}[k]$, el producto de los anchos equivalentes de $\tilde{f}[n]$ y $\tilde{F}[k]$ es N.

Resultado: A partir de la definición de DFT,

$$\begin{aligned}\tilde{F}[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]e^{-i2\pi nk/N} \\ \tilde{f}[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]e^{i2\pi nk/N}\end{aligned}$$

se tiene que el valor en el origen es igual a la suma de los elementos en el dominio opuesto,

$$\begin{aligned}\tilde{F}[0] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]e^{0} \\ \tilde{f}[0] &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]e^{0}\end{aligned}$$

y se demuestra que el producto es N

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\{\tilde{f}\}\mathcal{B}\{\tilde{F}\} &= \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]}{\tilde{f}[0]} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]}{\tilde{F}[0]} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]}{\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]} \\ &= N\end{aligned}$$