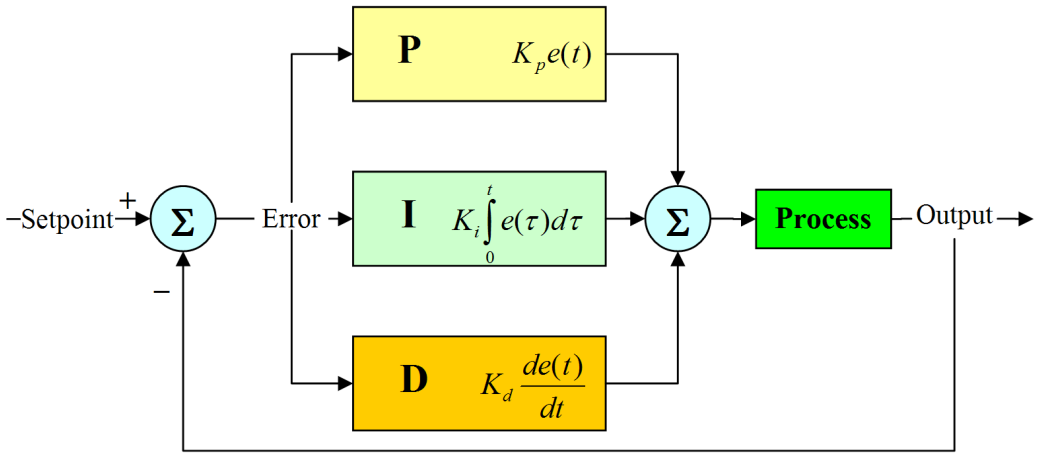
Prueba 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] La figura [1] describe un controlador PID:



Sea $y(t)$ la salida del proceso (*Output*), $r(t)$ la referencia (*Setpoint*), $e(t)$ el error (diferencia entre la referencia y la salida), $u(t)$ el control o entrada al proceso. La idea del sistema es que el proceso entregue la salida lo más cercana posible a la referencia (con el menor error posible). Para eso el control PID genera una señal de control que es la suma de una parte proporcional al error (P), otra a la integral (I) y otra al diferencial (D).

(a) [2 ptos] Encuentre la funcion de transferencia, $H(s)$, del sistema completo (con entrada $r(t)$ y salida $y(t)$). Suponga que el proceso es causal y que la función de transferencia es $P(s)$, con $P(0) = 1$.

(b) [2 ptos] Encuentre el valor final ($t \to \infty$) de $y(t)$ cuando la referencia es un escalón, para el caso de un controlador solo proporcional ($K_i = K_d = 0$). ¿Cuál es el error?

(c) [2 ptos] Repita (b), para un controlador PI, es decir, solo $K_d = 0$.

Resultado:

(a) Por las propiedades de la transformada de Laplace, la función de transferencia del control será

$$Q(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s$$

[1] Wikipedia, Pieter Kuiper

Para obtener la función de transferencia total, del diagrama se observa

$$Y(s) = Q(s)P(s)E(s) = Q(s)P(s)(R(s) - Y(s))$$

De donde se puede despejar $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{Q(s)P(s)}{1 + Q(s)P(s)} R(s)$$

Es decir la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{Q(s)P(s)}{1 + Q(s)P(s)} = \frac{(K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s)P(s)}{(1 + K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s)P(s)}$$

(b) Con solo el efecto proporcional la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)}$$

Y como la transformada de Laplace del escalón es $1/s$, la salida será

$$Y(s) = \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)} \frac{1}{s}$$

Para encontrar el valor final ocupamos el teorema del valor final

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

es decir

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)} \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{K_p P(0)}{1 + K_p P(0)} = \frac{K_p}{1 + K_p}$$

Nótese que el valor no tiende a 1 por lo que hay un error residual, que es:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 1 - \frac{K_p}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K_p}$$

(c) Siguiendo el mismo desarrollo tenemos

$$H(s) = \frac{(K_p + K_i \frac{1}{s})P(s)}{1 + (K_p + K_i \frac{1}{s})P(s)}$$

es decir

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} \frac{(K_p + K_i \frac{1}{s})}{1 + (K_p + K_i \frac{1}{s})} = 1$$

La acción integral eliminó el sesgo y ahora el sistema sí converge a la referencia:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 1 - 1 = 0$$

2. [6 ptos] Se define la transformada X de $f(t)$ como

$$F(r) = F(\sigma + i2\pi u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{1+t^{\sigma}} e^{-i2\pi ut}\, dt$$

Encuentre la región de convergencia de la transformada X para las siguientes funciones

(a) $f(t) = \sqcap(t)$
(b) $f(t) = t\sqcap(t-2)$
(c) $f(t) = t \sqcap (t)$

Resultado: La región de convergencia estará dada por aquellos valores de r para los cuales la integral exista. Dado que u está en una exponencial compleja de magnitud 1, el valor u no afecta la convergencia (al igual que en la transformada de Laplace). Por lo tanto la convergencia requiere la existencia de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(t)}{1+t^{\sigma}} \right| dt$$

(a) Para $f(t) = \sqcap(t)$, la integral es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(t)}{1+t^{\sigma}} \right| dt = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+t^{\sigma}}\, dt$$

El decaimiento de la función $1/(1+t^{\sigma})$ es mayor en la medida que σ sea mayor, por lo que el límite de la región de convergencia estará dado por el menor valor de σ para el cual la integral converge. Ese límite es $\sigma = 1$, ya que

$$\int \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(1+t)$$

que diverge en la medida que t tiende a ∞. Para $\sigma > 1$,

$$\frac{1}{1+t^{\sigma}} < \frac{1}{t^{\sigma}}$$

pero

$$\int_{0}^{\infty} t^{-\sigma}\, dt \approx \int_{\epsilon}^{\infty} t^{-\sigma}\, dt = \left. \frac{1}{1-\sigma} t^{1-\sigma} \right|_{\epsilon}^{\infty}$$

solo converge para $\sigma > 1$.

(b) Para $f(t) = t\sqcap(t-2)$, la integral es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(t)}{1+t^{\sigma}} \right| dt = \int_{2}^{\infty} \frac{t}{1+t^{\sigma}}\, dt$$

que convergerá para $\sigma > 2$.

(c) Para $f(t) = t \sqcap (t)$, la integral es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(t)}{1+t^{\sigma}} \right| dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1+t^{\sigma}}\, dt$$

que converge para todo σ. Nótese que el único lugar conflictivo (para algunos σ) $t = -1$ está fuera del rango de integración.

3. [6 ptos] Sea $\mathbf{g}(t)$, un vector en $\mathbb{R}^{n\times 1}$, la salida de un sistema multidimensional cuya entrada es $\mathbf{f}(t)$, también un vector en $\mathbb{R}^{n\times 1}$, descrito por

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t)$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Encuentre la función de transferencia del sistema, $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Resultado: Tomando transformada de Laplace a ambos lados (nótese que la propiedad de la derivada es la misma porque se aplicará a cada componente del vector), tenemos

$$s\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}\mathbf{G}(s) + \mathbf{F}(s)$$

de donde se puede despejar $\mathbf{G}(s)$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{G}(s) = \mathbf{F}(s)$$

$$\mathbf{G}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}(s)$$

Es decir, la función de transferencia es

$$\mathbf{H}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

4. [6 ptos] Resuelva la siguiente ecuación diferencial empleando la transformada de Laplace unilateral

$$y''(t) + 4y'(t) = \cos(t - 1/2) + 16t \quad \text{con} \quad y(1/2) = 0, \quad y'(1/2) = 1$$

Resultado: Para resolver este problema es necesario desplazar las funciones de manera que las condiciones iniciales queden en $t = 0$. Para eso definimos $p = t - 1/2$, con lo que el sistema queda

$$y''(p + 1/2) + 4y'(p + 1/2) = \cos(p) + 16p + 8 \quad \text{con} \quad y(1/2) = 0, \quad y'(1/2) = 1$$

y si definimos la función $u(p) = y(p + 1/2)$ tenemos

$$u''(p) + 4u'(p) = \cos(p) + 16p + 8 \quad \text{con} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

Esta ecuación se puede resolver en forma estándar en el dominio de Laplace

$$s^2U(s) + 4sU(s) - 1 = \frac{s}{s^2+1} + \frac{16}{s^2} + \frac{8}{s}$$

$$(s^2 + 4s)U(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{16}{s^2} + \frac{8}{s} + 1 = \frac{s}{s^2+1} + \frac{16 + 8s + s^2}{s^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{(s+4)(s^2+1)} + \frac{16 + 8s + s^2}{s^3(s+4)} = \frac{1}{(s+4)(s^2+1)} + \frac{s+4}{s^3}$$

$$U(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs + C}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^3}$$

que es

$$U(s) = \frac{1}{17}\left(\frac{1}{s+4} + \frac{-s+4}{s^2+1}\right) + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^3}$$

La inversa es

$$u(p) = \frac{1}{17}\left(e^{-4p} - \cos p + 4\,\mathrm{sen}\, p\right)\sqcap(p) + (p + 4p^2)\sqcap(p)$$

Ahora, reemplazando $u(p)$ con $y(t-1/2)$

$$y(t) = \left[\frac{1}{17}e^{-4(t-1/2)} - \frac{1}{17}\cos(t-1/2) + \frac{4}{17}\,\mathrm{sen}\,(t-1/2) + (t-1/2+4(t-1/2)^2)\right]\sqcap(t-1/2)$$