IEE 2103 Señales y Sistemas

Clase 4D: Transformada de Laplace Unilateral y probabilidades

4.9 LT unilateral

Los sistemas reales son causales (en el tiempo) y su comportamiento depende de las condiciones iniciales. La transformada de Laplace unilateral es especialmente apropiada para estos sistemas. Definición

$$F_1(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \quad \text{Re}(s) > \alpha$$

es decir,

$$\mathcal{L}_1\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\sqcap(t)\}$$

4.9 LT unilateral

1. $f(t)\sqcap(t)$ es una señal derecha, por lo tanto la ROC es un semiplano derecho.

2. Importante cuidar el comportamiento en el origen cuando hay una singularidad, por ejemplo

$$\int_{0+}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 0 \qquad \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$$

$$F_1(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

4.9 Propiedades de LT unilateral

Muy similares a las de la LT. Solo veremos las diferencias.

1. Desplazamiento

   a) $f(t)$ causal y $a > 0$

$$f(t-a) \longrightarrow e^{-as}F_1(s) \qquad \sigma > \alpha$$

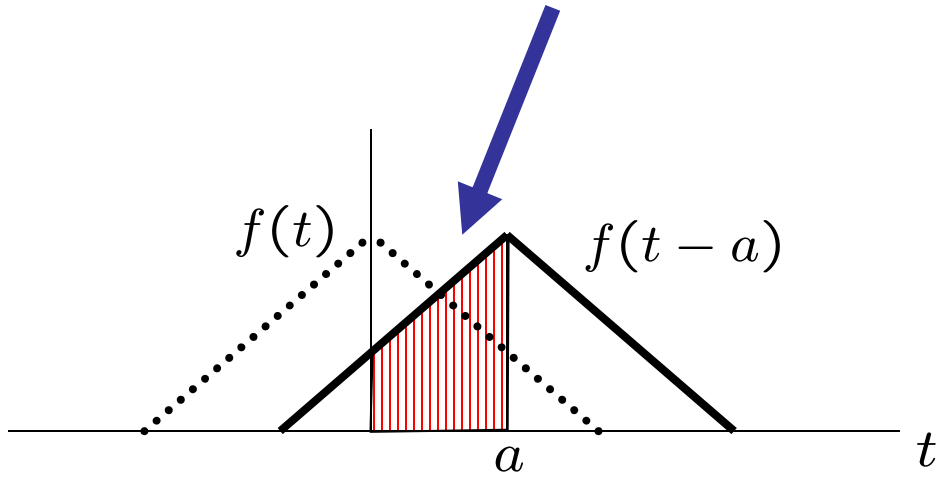
4.9 Propiedades de LT unilateral

1. Desplazamiento

b) $f(t)$ cualquiera y $a > 0$

$$f(t-a) \longrightarrow e^{-as}F_1(s) + \mathcal{L}_1\{f(t-a)\sqcap(a-t)\}$$

$$\sigma > \alpha$$



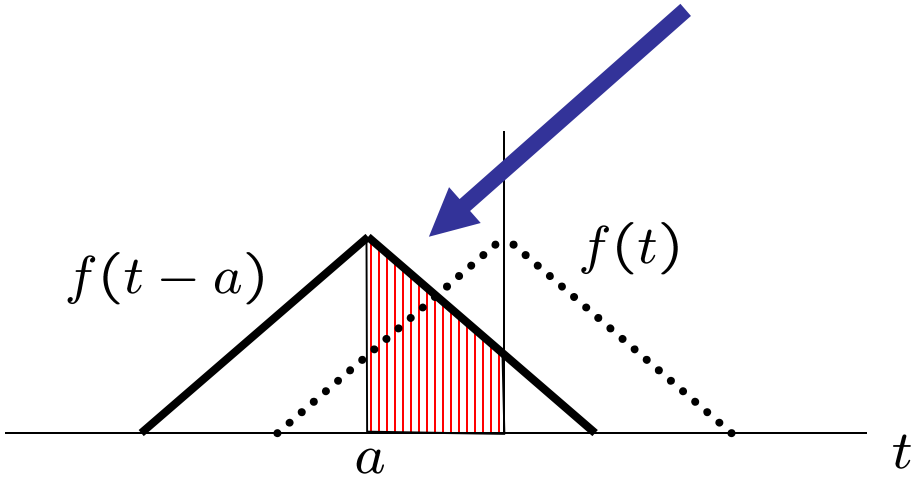
4.9 Propiedades de LT unilateral

1. Desplazamiento

b) $f(t)$ cualquiera y $a > 0$

$$f(t+a) \longrightarrow e^{as}\left[F_1(s) - \mathcal{L}_1\{f(t)\sqcap(a-t)\}\right]$$

$$\sigma > \alpha$$



4.9 Propiedades de LT unilateral

2. Convolución

$$f(t) * g(t) \longrightarrow F_1(s)G_1(s)$$

$$\sigma > \max(\alpha_1, \alpha_2)$$

Solo válida si $f(t)$ y $g(t)$ causales

4.7 Propiedades de LT

3. Similitud

$$f(at) \longrightarrow \frac{1}{|\,a\,|} F_1\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \frac{\sigma}{a} > \alpha$$

Solo para $a > 0$

4.7 Propiedades de LT

4. Diferenciación

$$f'(t) \longrightarrow sF_1(s) - f(0^-) \qquad \sigma > \alpha$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) \quad \longrightarrow \quad & s^n F_1(s) \\ & -\{f^{(n-1)}(0^-) + sf^{(n-2)}(0^-) \\ & \cdots + s^{n-1} f(0^-)\} \end{aligned}$$

4.7 Propiedades de LT

5. Integración

$$\int_{-\infty}^{t} f(\xi)\, d\xi \longrightarrow \frac{1}{s}F_1(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0-} f(t)\, dt$$

4.7 Valores inicial y final

Teorema del valor inicial

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF_1(s)$$

Teorema del valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF_1(s)$$

$sF_1(s)$ debe tener todos sus polos a la izquierda del plano s

Laplace y las probabilidades



Théorie Analytique

"Soit y_x une fonction quelconque de x; si l'on forme la suite infinie

$$y_0+y_1t+y_2t^2+y_3t^3+\ \cdots\ +y_xt^x+y_{x+1}t^{x+1}+\cdots\ +y_\infty t^\infty,$$

on peut toujours concevoir une fonction de t qui, développée suivant les puissances de t, donne cette suite: cette fonction est ce que je nomme *fonction génératrice de* y_x."

"Nous appellerons *fonction caractéristique*, et désignerons par $\phi(t)$, la valeur probable de

$$e^{itx},$$

c'est-à-dire

$$\phi(t) = \sum \alpha_h e^{itx_h}."$$

Probabilidad de la suma

Ejemplo: dos distribuciones uniformes X,Y en intervalo [0,1], Z = X + Y

$$f_X(x) = f_Y(x) = 1 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

La distribución de Z es

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Probabilidad de la suma

Si X e Y son independientes y distribuyen

$$X \sim f_X(x) \qquad Y \sim f_Y(y)$$

entonces

$$Z \sim f_Z(z) = \{f_X * f_Y\}(z)$$

Valores esperados

Definición de valor esperado

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Definición de momento k-ésimo

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Media y varianza

La media

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

La varianza

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$$

Función generadora de momentos

Se define la función generadora de momentos

$$M_X(t) = E[e^{Xt}]$$

Usando la serie de Maclaurin para la exponencial,

$$e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k t^k}{k!}$$

se puede escribir como

$$M_X(t) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k t^k}{k!}\right]$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[x^k] t^k}{k!}$$

Función generadora de momentos

La función generadora de momentos es única, es decir, si $M_X(t) = M_Y(t)$ para todo t, entonces

$$f_X(x) = f_Y(x)$$

Los momentos se obtienen de sus derivadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[x^k] t^k}{k!} \\ &= E[x] \end{aligned}$$

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = E[x^k]$$

Función generadora de momentos

Función generadora de momentos de la suma de variables independientes

$$
\begin{aligned}
M_{X+Y}(t) &= E[e^{(X+Y)t}] \\
&= E[e^{Xt}e^{Yt}] \\
&= E[e^{Xt}]E[e^{Yt}] \\
&= M_X(t)M_Y(t)
\end{aligned}
$$

Función generadora de momentos

$$
\begin{array}{ccc}
X + Y & \sim & f_{X+Y} = f_X * f_Y \\
\updownarrow \quad \updownarrow & & \updownarrow \\
M_X \quad M_Y & & M_{X+Y} = M_X M_Y
\end{array}
$$

FGM y la transformada de Laplace

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

$$F(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)\, dx$$

Otras funciones relacionadas:

- Función característica

$$\phi_X(t) = M_X(it)$$

- Función generadora de probabilidades

$$G_X(z) = E[z^X]$$