Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 1

15 de Marzo 2023

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl

Crédito a Ayudantías 2022-2, 2016-2

Repaso de Conceptos

Señales

Definición: Son transmisores de información que se pueden tratar matemáticamente como funciones de una variable independiente, la forma en que la función evoluciona en la medida que cambia la variable independiente contiene la información. Pueden ser modificadas por un sistema.

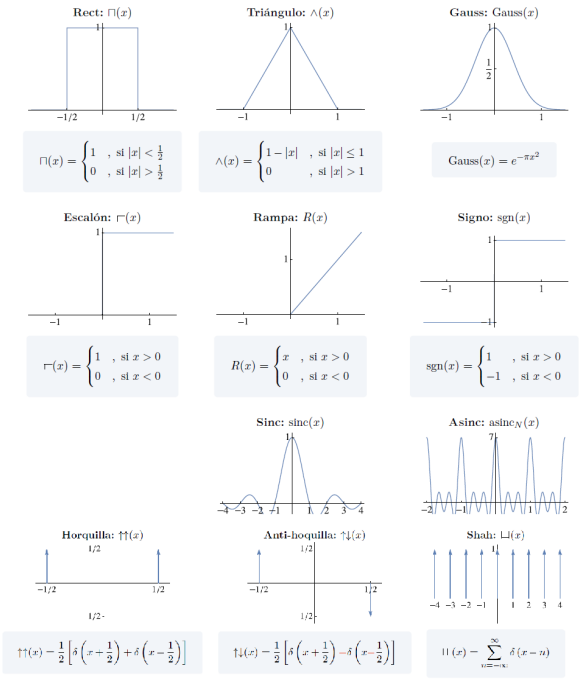
Clasificación según la naturaleza de la variable independiente:

- **Señales Continuas:** son aquellas que toman un valor para todos los valores de la variable independiente.
- **Señales Discretas:** son aquellas que solo toman valores para algunos puntos de la variable independiente.
- **Señales Digitales:** corresponden a las señales que toman valores acotados y solo para algunos valores de la variable independiente.

Observación: una señal continua puede ser presentada matemáticamente por una función discontinua.

Señales importantes:

Hay un grupo particular de funciones que nos interesarán para el modelamiento de señales.



Sistemas

Definición: Son mecanismos que transforman señales.

Tipos de sistemas:

- **Causales:** Son aquellos en que la salida solo depende del estado actual y de estados pasados.
- **Invariantes:** L(f(x+a)) = g(x+a)
- **Linealidad:** un sistema $L\{x(t)\}$ es lienal cuando cumple homogeneidad y superposición.
  1. $L\{x(t)\}$ es homogeneo si $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  2. $L\{x(t)\}$ cumple con superposición si $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$
- **LTI:** lineales e invariantes.
- **Con memoria:** requieren estados pasados.
- **Estables:** a entradas acotadas entregan salidas acotadas.
- **Invertibles:** si un sistema tiene un sistema inverso con el que al conectarse en serie la salida da la entrada, es invertible.

Distribuciones

Son mapeos aplicados a funciones de Schwartz $\psi(x)$ que son funciones infinitamente derivables y que decaen rápidamente a 0.
Una distribución temperada se define como una distribución inducida por funciones, descrita de la forma:

$$< F, \psi >= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\psi(x)dx$$

Propiedades

- Derivada: $< T', \psi > =$ - $< T, \psi' >$
- Desplazamiento: $< \tau_a T, \psi > = < T(x-a), \psi >$
- Escalamiento: $< \delta_a T, \psi > = < T, \frac{1}{|a|}\psi >$
- Multiplicación: $< Tf, \psi > = < T, f\psi >$

El Impulso

- Es una distribución de la forma: $< \delta, \psi >= \psi(0)$
- Desplazada se ve como $< \delta_a, \psi >= \psi(a)$
- Cumple con la propiedad del muestreo: $f(x)\delta = f(0)\delta$

Convolución

Se define la convolución como una operación entre dos funciones que nos entrega como resultado una tercera función. Su expresión matemática es:

$$h(t) = \{g * f\}(t) = \int_{\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx$$

Lo que gráficamente corresponde a el área de la función multiplicación entre una de las funciones estática y la otra desplazada para todos los posibles desplazamientos.

La convolución cumple con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $h(t) = \{g * f\}(t) = \{f * g\}(t)$
- Asociatividad: $h(t) = \{r * \{g * f\}\}(t) = \{g * \{r * f\}\}(t)$
- Distributividad: $h(t) = \{g * (f + r)\}(t) = \{g * f\} + \{g * r\}(t)$

- Multiplicación por escalar: $h(t) = \{a \cdot g * f\}(t) = \{g * a \cdot f\}(t) = a \cdot \{g * f\}(t)$
- Derivación: $h(t) = \{g * f\}(t) \rightarrow h'(t) = h(t) = \{g' * f\}(t) = h(t) = \{g * f'\}(t)$
- Convoluciones con el impulso: cumple con la propiedad del cedazo, y además se harán evidentes algunos desplazamientos.
  - $h(t) = \delta(x) * f(x) = f(x)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x) * f(x - a) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x - b) = f(x - a - b)$

Ejercicios

1. Determine la parte par e impar de $ln(x)$.

En primer lugar podemos expresar x como $x = |x| \cdot sgn(x)$ y aplicar logaritmo para tener: $ln(x) = ln(|x|) + ln(sgn(x))$.
Luego podemos separar la parte par de la impar de tal manera que

$$e(x) = \frac{ln(|x|) + ln(sgn(x)) + ln(|-x|) + ln(sgn(-x))}{2}$$

. En este caso es claro notar que si $ln(sgn(x)) = 0$ entonce $ln(sgn(-x)) = i\pi$ y estos valores se mantendrán siempre independiente del valor de x, por lo que

$$e(x) = ln(|x|) + \frac{i\pi}{2}$$

. Por otro lado la parte impar es

$$o(x) = \frac{ln(|x|) + ln(sgn(x)) - ln(|-x|) - ln(sgn(-x))}{2}$$

. Es claro ver que si $x > 0$ entonces $o(x) = \frac{i\pi}{2}$ mientras que si $x < 0$, $o(x) = \frac{-i\pi}{2}$ por lo que juntando ambas expresiones llegamos a

$$o(x) = \frac{-i\pi}{2} \cdot sgn(x)$$

2. Tenemos el sistema:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} sinc(t-n)dt$$

Calcule $\frac{dg(x)}{dx}$ si $f(x) = \text{lll}(x)$

Cada sinc(x) desfasado vale 1 solo en su origen y para todos los demás enteros vale cero.
Además recordando la propiedad del muestreo $\delta_a \cdot f(x) = f(a)$ podemos escribir

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} \text{lll}(x) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

. Podemos recordar que la integral del impulso se puede escribir como un escalón por lo que:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x-n)$$

. De esta forma podemos volver a derviar el sistema para llegar a que

$$g(x)' = \text{lll}(x)$$

3. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Demuestre:

$$\frac{d}{dx}[u(x-1/2) + u(x+1/2)] = \delta(x^2 - 1/4)$$

Recordamos que el delta toma valor distinto de cero solamente en $\delta(0)$. De esta manera vaemos que $x^2 - 1/4 = 0$ se resulve en $x = -1/2$ y $x = 1/2$ por lo que esta expresión es equivalente a:

$$\delta(x^2 - 1/4) = \delta_{1/2} + \delta_{-1/2}$$

. Es luego trivial ver que al derivar la expresión de la izquierda se llega de igual manera a $\delta_{1/2} + \delta_{-1/2}$.

   b) Calcule la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{lll}(\frac{x}{a}) \sqcap (\frac{x}{5a})dx$$

Recordemos que el lll(ax) se puede escribir como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\delta(x - \frac{n}{a})$$

. Por otro lado el $\sqcap(\frac{x}{5a})$ corresponde a un rect de ancho 5a. Por lo que al multiplicar ambas funciones el problema se reduce a:

$$a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-5a/2}^{5a/2} \delta(x - na)dx$$

. Recordando que según la defínción del delta de Dirac se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

. Sin embargo nuestra expresión cada delta está ponderado por a. Esto generá que la syma de los 5 impulsos que caben dentro del rect tengan área $5a$.

4. Un sistema LTI tiene respuesta al impulso $h(t) = e^{-x} \sqcap (x)$. A partir de esto, responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Cual es la salida del sistema si la entrada es $f(t) = e^{-x} \sqcap (x)$? Encuentre una expresión analítica.

   Sabemos que la salida de un sistema LTI $(g(x))$ corresponde a la convolución de la entrada $(f(x))$ con la respuesta al impulso $(h(x))$. Entonces:

   $$g(x) = \{f * h\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)h(x - a)da$$

   En el esquema de este problema tenemos que:

   - Entrada: $e^{-x} \sqcap (x)$
   - Respuesta al impuslo: $e^{-x} \sqcap (x)$

   Reemplazando esto en la convolución:

   $$g(x) = \{f * h\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a} \sqcap (a) e^{-x+a} \sqcap (x - a)da$$

   Si uso propiedades de las potencias y re ordeno:

   $$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a} e^{a} e^{-x} \sqcap (x - a) \sqcap (a)da$$

   Podemos ver que e^{-x} es constante para a, por lo que lo puedo sacar de la integral:

   $$g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a} e^{a} \sqcap (x - a) \sqcap (a)da$$

   Por otro lado, tenemos que $e^{-a}e^{a} = e^{0} = 1$. Al sustituir en la integral tenemos:

$$g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x-a) \sqcap (a) da$$

Podemos observar que la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x-a)\sqcap(a)da$ es la convolución de un rect con otro rect, lo que se demostró en clase que es un triángulo: $\{\sqcap * \sqcap\}(x) = \wedge(x)$ Entonces, al sustituir esto, el resultado queda:

$$g(x) = e^{-x} \wedge (x)$$

b) Demuestre que una exponencial compleja de la forma e^{ix} es una auto función del sistema.

Para resolver esto, tomamos la exponencial compleja como entrada al sistema. Entonces, dado que el sistema es LTI, la salida del sistema es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a-x)} e^{-a} \sqcap (a) da$$

Usando propiedades de las potencias:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{ia} e^{-a} \sqcap (a) da$$

Dado que e^{ix} no depende de a, podemos sacarlo de la integral:

$$g(x) = e^{-xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(i-1)} \sqcap (a) da$$

Utilizando la definición de rect:

$$g(x) = e^{-xi} \int_{-1/2}^{1/2} e^{a(i-1)} da$$

Ahora, sabemos que $\int_{-1/2}^{1/2} e^{a(i-1)} da$ es una constante por teorema fundamental del cálculo (la función es continua y acotada en el intervalo) por lo que demostramos que e^{ix} es autofunción del sistema, ya que la salida es la entrada multiplicada por una constante, lo que es la definición de autofunción.

5. Demuestre, utilizando sus conocimientos de distribuciones, que la derivada de un escalón es un impulso.
Podemos comenzar con la propiedad:

$$\langle u', \Psi \rangle = -\langle u, \Psi' \rangle$$

Por definición de producto interno podemos expresarlo como:

$$-\langle u, \Psi' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\Psi'(x)dx$$

Luego podemos quitar el escalón cambiando los límites de la integral:

$$-\langle u, \Psi' \rangle = \int_{0}^{\infty} \Psi'(x)dx$$

Por teorema fundamental se puede sencillamente reescribir como:

$$-\langle u, \Psi' \rangle = -(\lim_{x\to\infty} \Psi(x) - \Psi(0))$$

. Dado que $Psi(x)$ pertenece al espacio de funciones de Schwartz tiene que decaer rápidamente, lo que implica que su valor en infinito debe ser cero. Esto es propio de todas las funciones en el espacio de Schwartz. Luego la expresión se puede reescribir como:

$$-\langle u, \Psi' \rangle = \Psi(0)$$

Esta es precisamente la definición de una delta de Dirac en el espacio de las funciones de Schwartz, por lo que se muestra que $u(x)' = \delta(x)$.