IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 4

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2023
Tiempo: 1 hr. 20 min.
Puntos: 40
Fecha: 30/06/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- **Responda cada pregunta en hojas separadas y entregue 4 hojas de respuestas, aunque estén en blanco**. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (10 pts.) **Sistema de fase mínima**. Un sistema es de fase mínima si tanto el sistema como su sistema inverso son sistemas causales y estables. Suponga un sistema con función de transferencia genérica de la forma

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

   (a) Primero suponga que $H(z)$ es de fase mínima.

      i. (2 pts.) Determine que condiciones deben cumplir a y b en este caso.

      ii. (2 pts.) Dibuje un posible diagrama de polos y ceros para $H(z)$.

   (b) Ahora suponga que $H(z)$ no es de fase mínima pero es estable.

      i. (4 pts.) Escriba $H(z)$ como el producto de un sistema de fase mínima $H_{\min}(z)$ y otro sistema $W(z)$, es decir $H(z) = H_{\min}W(z)$, bajo la condición $|H_{\min}(z)| = |H(z)|$, es decir que $H_{\min}(z)$ conserve la respuesta de magnitud de $H(z)$.

      ii. (2 pts.) ¿Qué tipo de filtro es $W(z)$?.

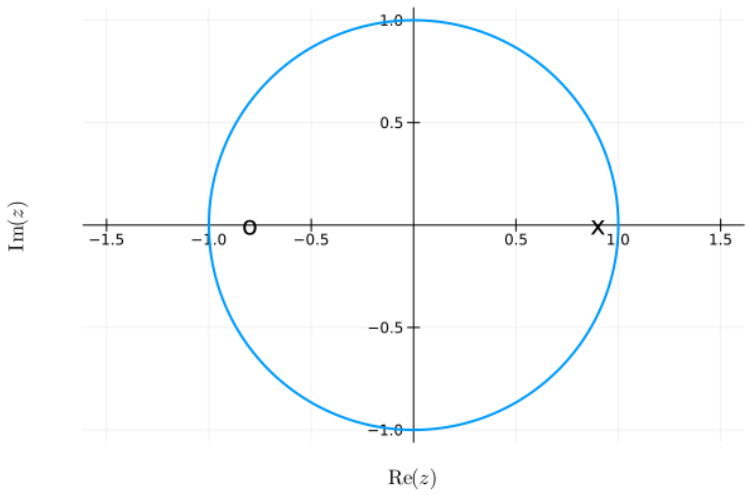
Solución

(a) i. Para que el filtro sea de fase mínima, la condición que el sistema inverso sea estable implica que tanto los ceros y los polos de la respuesta de frecuencia deben estar al interior del círculo unitario. Esto es por que el sistema inverso es simplemente el denominador del sistema original dividido por su numerador, es decir, se intercambian polos por ceros → **1 pt.**

Esto implica que $|a| < 1$ y $|b| < 1$ → **1 pt.**

ii. Un posible diagrama de polos y ceros es el de la figura, donde tanto el polo como el cero están dentro del círculo unitario.

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...



→ **2 pts.**

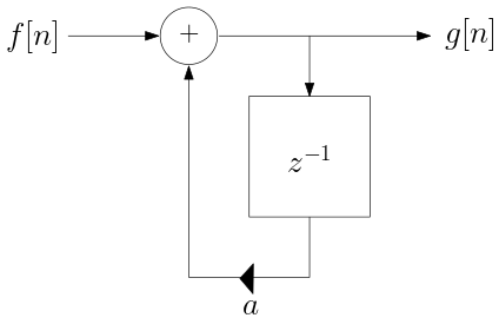
(b) i. Si $H(z)$ es estable pero no de fase mínima, significa que tiene el polo dentro del círculo unitario, pero el cero fuera de él → **1 pt.** Entonces multiplicamos y dividimos por un factor de tal forma de agregar un cero dentro del círculo unitario para el sistema $H_{\min}(z)$ → **1 pt.**

Ahora, para mantener la respuesta de magnitud original es necesario que $|W(z)| = 1$, lo que se logra agregando el cero en la posición $z = \frac{1}{a^*}$ → **1 pt.** , donde a^* es el complejo conjugado de a. Entonces

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}} \frac{z^{-1} - a^*}{z^{-1} - a^*} = \underbrace{\frac{z^{-1} - a^*}{1 - bz^{-1}}}_{H_{\min}(z)} \underbrace{\frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a^*}}_{W(z)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

ii. Como $|W(z)| = 1$ entonces este sistema representa un filtro pasa-todo → **2 pts.**

2. (10 pts.) **Sistema de primer orden**. Considere el sistema de primer orden determinado por el siguiente diagrama de bloques y con la condición inicial $g[-1] = 2$.



(a) (2 pts.) Determine la ecuación de diferencias del sistema.

(b) (2 pts.) Determine la función de transferencia del sistema asumiendo reposo inicial.

(c) (4 pts.) Exprese la salida del sistema en el dominio Z como la suma de dos partes: una relacionada con la respuesta a entrada cero y otra con la respuesta a estado cero.

(d) (2 pts.) Determine la respuesta a entrada cero $g_{\text{oi}}[n]$.

Solución

(a) La ecuación de diferencias es simplemente

$$g[n] - ag[n-1] = f[n] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) Tomando Transformada Z y asumiendo condiciones iniciales nulas

$$G(z) - az^{-1}G(z) = F(z)$$

por lo tanto

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) En esta parte, es necesario considerar condiciones iniciales, entonces

$$G(z) - a(z^{-1}G(z) + y[-1]) = F(z) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

por lo que

$$G(z) = \underbrace{\frac{F(z)}{1 - az^{-1}}}_{\text{Respuesta a estado cero}} + \underbrace{\frac{ay[-1]}{1 - az^{-1}}}_{\text{Respuesta a entrada cero}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

vemos que si $y[-1] = 0$ (reposo inicial) queda la respuesta de frecuencia calculada en el punto anterior.

(d) Sabemos que

$$g_{\text{oi}}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{2a}{1 - az^{-1}}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{2az}{z - a}\} = 2a^{n+1}\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

3. (10 pts.) **Intercalado.** Una señal discreta $w[n]$ se construye intercalando las muestras de las secuencias $f[n]$ y $g[n]$. Además, $F(z)$ y $G(z)$, las Transformadas Z de $f[n]$ y $g[n]$, tienen ROCs que son $0.64 \leq |z| \leq 4$ y $0.25 \leq |z| \leq 9$, respectivamente.

(a) (2 pts.) Determine una expresión para $w[n]$ en términos de $f[n]$ y $g[n]$.

(b) (3 pts.) Determine una expresión para $W(z)$, la Transformada Z de $w[n]$, en términos de $F(z)$ y $G(z)$.

(c) (1 pto.) Determine si $W(z)$ contiene un polo en el origen.

(d) (4 pts.) Determine la ROC de $W(z)$.

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

Solución

(a) Claramente $w[2n] = f[n]$ y $w[2n+1] = g[n]$ → **1 pt.** por lo que

$$w[n] = \begin{cases} f[n], & n \text{ par} \\ g[n], & n \text{ impar} \end{cases} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(b) La Transformada Z es

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[2k]z^{-2k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[2k+1]z^{-(2k+1)} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]z^{-2k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]z^{-(2k+1)} = F(z^2) + z^{-1}G(z^2) \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

(c) De la expresión anterior vemos que si existe un polo en el origen, porque $G(z^2)$ se multiplica por z^{-1} → **1 pt.**

(d) Como las Transformadas Z de $f[n]$ y $g[n]$ son evaluadas en z^2, los polos z_n de $w[n]$ se transforman en $z_n^{\frac{1}{2}}$ → **1 pt.** , lo que implica que los polos de $W(z)$ quedan delimitados por los valores

$$\sqrt{0.64}, \sqrt{4}, \sqrt{0.25}, \sqrt{9} = 0.8, 2, 0.5, 3 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Además, el polo en el origen está fuera de la región de convergencia, por lo que no influye en la ROC → **1 pt.**

Entonces, dado que las ROCs de $f[n]$ y $g[n]$ son anillos en el plano-z, la ROC de $w[n]$ debe ser el anillo de intersección interior, es decir

$$0.8 \leq |z| \leq 2 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

4. (10 pts.) **Sistema causal.** Considere el sistema causal determinado por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 - a(\phi)z^{-1}}{1 - b(\phi)z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

donde $a(\phi) = \frac{1}{2}e^{i(\phi+\pi)}$, $b(\phi) = \frac{1}{2}e^{i\phi}$ y ϕ es un parámetro del sistema.

(a) (2 pts.) Determine los polos y ceros de $H(z)$ en función de ϕ.

(b) (2 pts.) Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H(z)$.

(c) (2 pts.) Bosqueje la respuesta de frecuencia (magnitud) para $\phi = 0$

(d) (2 pts.) Bosqueje la respuesta de frecuencia (magnitud) para $\phi = \pi$

(e) (2 pts.) Determine que tipo de filtro implementa el sistema y escriba todo lo que se pueda decir respecto a su respuesta al impulso, en función de ϕ.

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

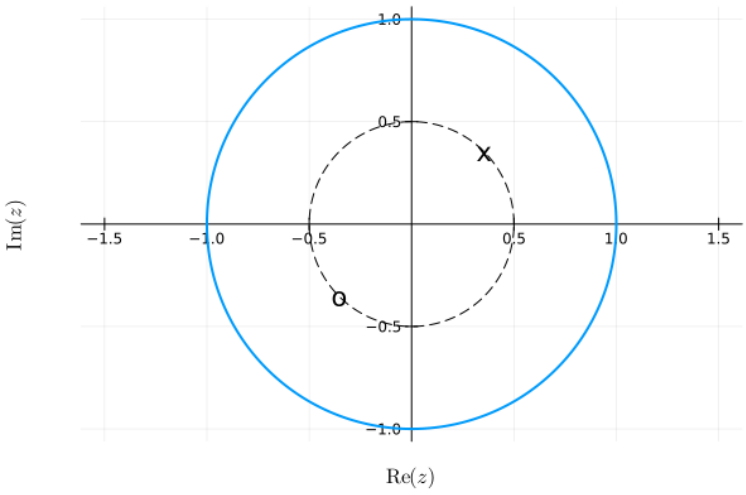
Solución

(a) Reescribiendo $H(z)$:

$$H(z) = \frac{z - a(\phi)}{z - b(\phi)}$$

por lo que está función de transferencia tiene un cero en $a(\phi) = \frac{1}{2}e^{i(\phi+\pi)}$ → **1 pt.** y un polo en $b(\phi) = \frac{1}{2}e^{i\phi}$ → **1 pt.**

(b) Tal como lo muestra la figura, los polos y ceros se mueven siguiendo de un círculo de radio $\frac{1}{2}$ y están desfasados un ángulo de π entre ellos → **1 pt.** . Un posible caso se muestra en la siguiente figura:



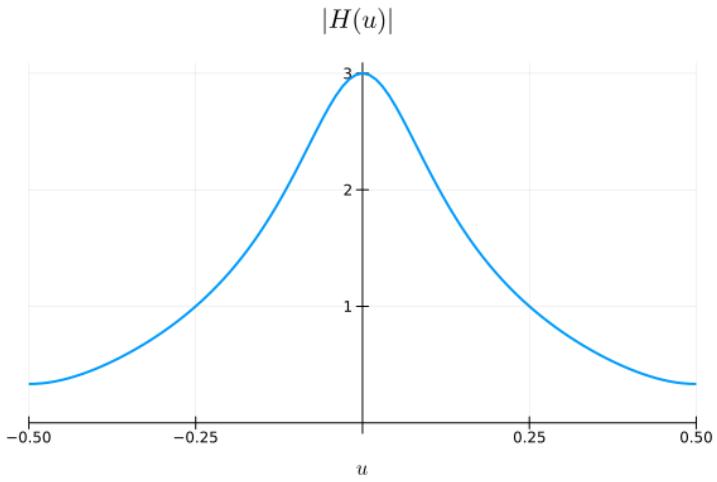
→ **1 pt.**

(c) Si $\phi = 0$

$$H(z) = \frac{z - (-\frac{1}{2})}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

lo que implica que esto es un filtro pasa bajos, porque tiene un polo cerca de la frecuencia 0 y un cero cerca de la frecuencia de Nyquist → **1 pt.** Sin embargo, como se observa en el gráfico, como el cero tiene un radio de 0.5 no decae a cero en Nyquist.

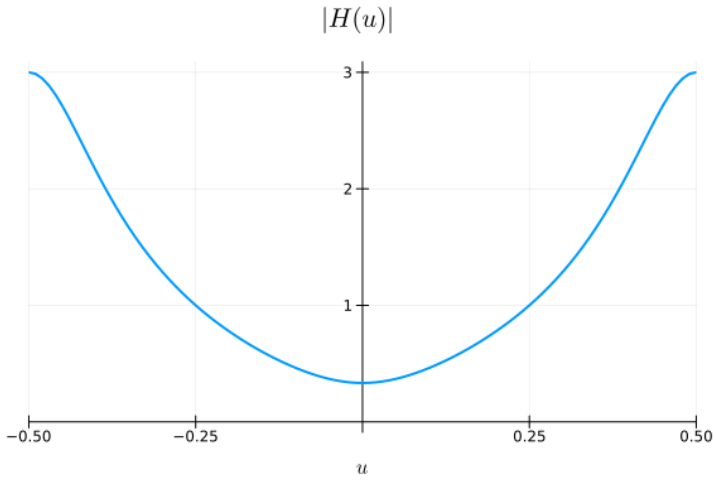
La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...



(d) Si $\phi = \pi$

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z - (-\frac{1}{2})} = \frac{z - \frac{1}{2}}{z + \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

lo que implica que esto es un filtro pasa altos, porque tiene un cero cerca de la frecuencia 0 y un polo cerca de la frecuencia de Nyquist $\rightarrow$ **1 pt.** Sin embargo, como se observa en el gráfico, como el cero tiene un radio de 0.5 no decae a cero en cero.



(e) Dependiendo del valor de ϕ este sistema puede implementar un pasabajo, pasa altos, con respuestas al impulso reales, como vimos recientemente, $\rightarrow$ **1 pt.** pero también filtros que resalten una frecuencia positiva y rechazen la misma frecuencia negativa, o viceversa. En estos últimos casos, estos filtros no contienen respuestas al impulso reales $\rightarrow$ **1 pt.**