Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 1

19 de Agosto 2022

Belén Bravo Kunz - bkbravo@uc.cl
Michel Rozas Fernández - mvrozas@uc.cl
Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl
Iñaki Gacitúa Núñez - igacituan@uc.cl

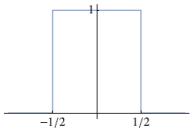
---

1. Resumen

1.1. Señales importantes

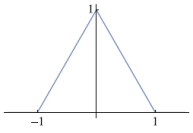
Las principales señales con las que se trabajará en el curso son:

Rect: $\sqcap(x)$



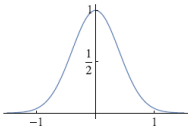
$$\sqcap(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Triángulo: $\wedge(x)$



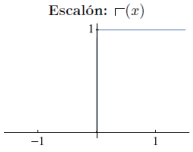
$$\wedge(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , \text{ si } |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{ si } |x| > 1 \end{cases}$$

Gauss: $\text{Gauss}(x)$



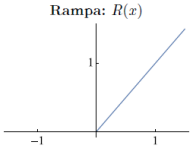
$$\text{Gauss}(x) = e^{-\pi x^2}$$

Escalón: $\sqcap(x)$



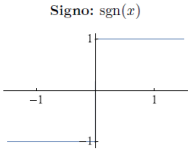
$$\sqcap(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Rampa: $R(x)$



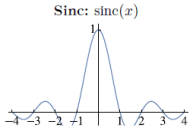
$$R(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Signo: $\text{sgn}(x)$

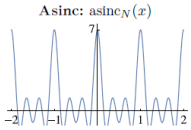


$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x > 0 \\ -1 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

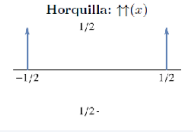
Sinc: $\text{sinc}(x)$



Asinc: $\text{asinc}_N(x)$

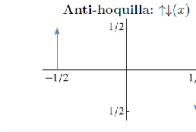


Horquilla: $\uparrow\uparrow(x)$



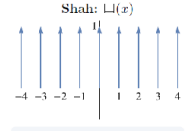
$$\uparrow\uparrow(x) - \frac{1}{2}\left[\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) + \delta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

Anti-hoquilla: $\uparrow\downarrow(x)$



$$\uparrow\downarrow(x) - \frac{1}{2}\left[\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) - \delta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

Shah: $\sqcup\!\sqcup(x)$



$$\sqcup\!\sqcup(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

1.2. Distribuciones

Son mapeos aplicados a funciones de Schwartz $\psi(x)$ que son funciones infinitamente derivables y que decaen rápidamente a 0.
Una distribución temperada se define como una distribución inducida por funciones, descrita de la forma:

$$< F, \psi >= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\psi(x)dx$$

Propiedades

- Derivada: $< T', \psi > =$ - $< T, \psi' >$
- Desplazamiento: $< \tau_a T, \psi > = < T(x-a), \psi >$
- Escalamiento: $< \delta_a T, \psi > = < T, \frac{1}{|a|}\psi >$
- Multiplicación: $< Tf, \psi > = < T, f\psi >$

1.3. El Impulso

- Es una distribución de la forma: $< \delta, \psi >= \psi(0)$
- Desplazada se ve como $< \delta_a, \psi >= \psi(a)$
- Cumple con la propiedad del muestreo: $f(x)\delta = f(0)\delta$

1.4. Convolución

Se define la convolución como una operación entre dos funciones que nos entrega como resultado una tercera función. Su expresión matemática es:

$$h(t) = \{g * f\}(t) = \int_{\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx$$

Lo que gráficamente corresponde a el área de la función multiplicación entre una de las funciones estática y la otra desplazada para todos los posibles desplazamientos.

La convolución cumple con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $h(t) = \{g * f\}(t) = \{f * g\}(t)$
- Asociatividad: $h(t) = \{r * \{g * f\}\}(t) = \{g * \{r * f\}\}(t)$
- Distributividad: $h(t) = \{g * (f + r)\}(t) = \{g * f\} + \{g * r\}(t)$

- Multiplicación por escalar: $h(t) = \{a \cdot g * f\}(t) = \{g * a \cdot f\}(t) = a \cdot \{g * f\}(t)$
- Derivación: $h(t) = \{g * f\}(t) \rightarrow h'(t) = h(t) = \{g' * f\}(t) = h(t) = \{g * f'\}(t)$
- Convoluciones con el impulso: cumple con la propiedad del cedazo, y además se harán evidentes algunos desplazamientos.
  - $h(t) = \delta(x) * f(x) = f(x)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x) * f(x - a) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x - b) = f(x - a - b)$

2. Ejercicios

2.1. Señales importantes

1. Escriba la función $\sqcap(x)$ en términos de $u(x)$ donde $u(x)$ es escalón.

   La función rect se puede escribir como la suma de dos escalones desplazados tal que:

   $$\sqcap(x) = u\left(x + \frac{1}{2}\right) - u\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

2. Escriba la función signo en términos de escalón.

   La función signo se puede escribir como la suma de dos escalones desplazados tal que:

   $$\text{signo}(x) = 2u(x) - 1$$

3. Calcule la siguiente integral:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \wedge(x - 1)\text{Ш}(100x)dx$$

   El Shah es una suma de impulsos (tren de impulsos), por lo que se puede expresar de la siguiente manera:

   $$\Sigma\ \delta(100x - n)$$

   Que aplicando la fórmula del impulso de una función.

   $$\frac{1}{100} \cdot \Sigma\ \delta(x - \frac{n}{100})$$

Entonces por linealidad de la sumatoria y la integral:

$$\frac{1}{100}\sum_{n=0}^{200}\int_{-\infty}^{\infty}\wedge(x-1)\delta(x-\frac{n}{100})dx$$

La sumatoria quedó de 0 hasta 200 debido a que la función triángulo restringe el rango de suma al ir de 0 a 2, y como los impulsos del Shaa se encuentran separados en 1/100, son 200 los que están dentro del rango.

Ahora es importante notar que es posible aplicar propiedad del cedazo en la integral.

$$\frac{1}{100}\sum_{n=0}^{200}\wedge(\frac{n}{100}-1)$$

Afortunadamente, la función triángulo es posible escribirla de forma matemática.

$$\wedge(x)=1-|x|$$

$$\wedge(x)=1-|x-1|$$

Luego reemplazando en la Sumatoria y además, aplicando simetría es posible dejar la sumatoria de 0 a 99, sumando aparte el término de n = 100.

$$\frac{1}{100}\big(2(\sum_{n=0}^{99}1-|\frac{n}{100}-1|)+1\big)$$

Notamos que entre 0 y 99 la resta dentro del valor absoluto es negativo, por lo que con la definición de valor absoluto se tiene:

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{50}\sum_{n=0}^{99}\frac{n}{100}$$

Aplicando Sumatoria notable:

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{5000}\cdot\frac{99\cdot 100}{2}=1$$

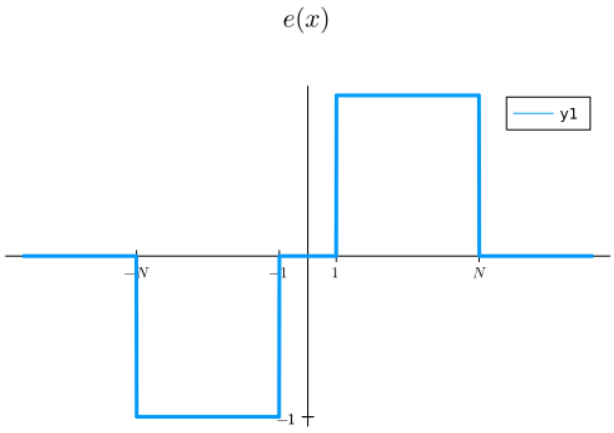
4. Encuentre una solución para:

$$f(f(x))=f(x)$$

Una solución posible es $f(x)=\text{signo}(x)$, pero existen otras soluciones posibles.

Por ejemplo, podría ser cualquier función constante o el escalón.

5. Considere la función escalera presentada a continuación. Exprese la función en término de alguna de las funciones vistas en clase



La función escalera está compuesta de dos rects desplazados en una cantidad $\pm 1 + \frac{N+1}{2}$ y son de ancho $N-1$, uno con amplitud positiva y otro con amplitud negativa.

Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$e(x) = \sqcap\left(\frac{x - \frac{N-1}{2}}{N-1}\right) - \sqcap\left(\frac{x + \frac{N-1}{2}}{N-1}\right)$$

Es importante notar que este problema se puede abordar de diferentes formas:

- Como una resta de signo, escalones y rect
- Como una suma de diferentes escalones
- Otras posibilidades

Lo importante es describir correctamente el gráfico. Porque si re escribimos las diferentes posibilidades y utilizamos definiciones, dan el mismo resultado.

2.2. Distribuciones

1. Demuestre que la derivada de una distribución es $< T', \psi > =$ - $< T, \psi' >$

   Para demostrar esto es necesario en primer lugar, escribir la distribución en forma integral:

$$< T', \psi >= \int_{-\infty}^{\infty} T'(x)\psi(x)\ \mathrm{dx}$$

Luego, realizamos integración por partes usando la fórmula:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Si definimos $dv = T'$ y $u = \psi$ podremos expandir por integración por partes la derivada de la distribución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T'(x)\psi(x)\ \mathrm{dx} = \left[\lim_{x\to\infty}\{T(x)\psi(x)\} - \lim_{x\to-\infty}\{T(x)\psi(x)\}\right] - \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\psi'(x)\ \mathrm{dx}$$

Dado que ψ es una función de Swartz y decae rápidamente a cero, el límite a $\pm\infty$ es cero, por lo que el término del medio se transforma en una resta de ceros y se elimina. Entonces se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T'(x)\psi(x)\ \mathrm{dx} = -\int_{-\infty}^{\infty} T(x)\psi'(x)\ \mathrm{dx}$$

Y si reescribimos la integral en forma de distribución se tiene:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} T(x)\psi'(x)\ \mathrm{dx} = -<T,\psi'>$$

Finalmente al sustituir queda demostrado que:

$$<T',\psi> = -<T,\psi'>$$

2.3. Impulso

1. Determine si el impulso tiene alguna simetría particular.

   El impulso tiene simetría par. Esto se debe a que cumple con que al aplicarse en un punto esta vale cero en todos los puntos, incluyendo a su inverso aditivo. Menos en cero, que no tiene inverso aditivo.

2. Demuestre que

$$-1 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+e^x)\delta'\ \mathrm{dx}$$

   Para resolver esto, es necesario notar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+e^x)\delta'\ \mathrm{dx} = <\delta', (1+e^x)>$$

Si aplicamos propiedad de la derivación de las distribuciones en el lado derecho queda de la forma:

$$< \delta', (1 + e^x) >= - < \delta, (1 + e^x)' >$$

Derivando el lado derecho se obtiene:

$$- < \delta, (1 + e^x)' >= - < \delta, e^x >$$

Sabemos que la distribución δ aplicada a una función corresponde a evaluar la función en cero, luego:

$$- < \delta, e^x >= -e^0 = -1$$

Finalmente, sustituyendo se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^x)\delta' \, \mathrm{dx} = -1$$