Examen

◁ *Lunes 05 de julio, 2010* ⊗ *9:00-11:30* ▷

1. Considere el sistema que se muestra en la fig. 1 (a), el cual se compone de un muestreador con periodo de muestreo T_s seguido por un filtro digital cuya respuesta al impulso en el dominio $\mathcal{Z}$ está dada por:

$$H(z) = \frac{1}{T_s}\frac{z-1}{z(z-1)}$$

Al sistema se le aplica una señal diente de sierra $x(t)$, $t \geq 0$ de periodo T y amplitud T igual al periodo como se ilustra en la fig. 1 (b).

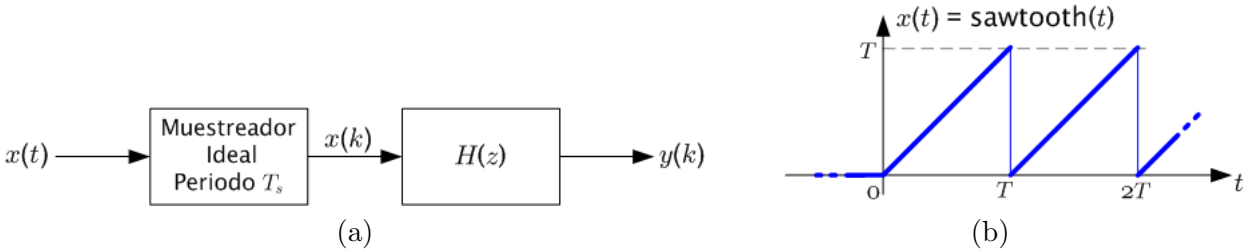


Figura 1: Sistema del problema 1 y señal diente de sierra.

   (a) Si T_s se elige de manera que esté contenido un número de veces en T en forma exacta:
      i. Grafique un periodo de $x(t)$ y superponga un periodo de $x(k)$.
      ii. Calcule el número de muestras N_s de $x(k)$ en un periodo T en función de T_s.
      iii. Calcule el número de intervalos N_I de largo T_s en un periodo T en función de T_s.
      iv. Calcule el periodo N de $x(k)$ en función de T y T_s.
   (b) Sea $\bar{x}(k)$ un periodo de $x(k)$, tal que $\bar{x}(k) = x(k)$, si $0 \leq k \leq N-1$, y $\bar{x}(k) = 0$, si $k < 0$ o $k \geq N$. Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ de $\bar{x}(k)$.
   (c) Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ del tren de impulsos discretos $\delta_N(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(k - iN)$ para $k \geq 0$.
   (d) Obtenga una expresión matemática para $x(k)$.
   (e) Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ de $x(k)$.
   (f) Obtenga la ecuación de diferencias que describe el filtro $H(z)$.
   (g) Calcule los primeros 5 términos de la respuesta al impulso de $H(z)$ si $T = 1$ y $T_s = \frac{1}{4}$.
   (h) Calcule la salida $y(k)$ si $T = 1$ y $T_s = \frac{1}{4}$.

2. Los filtros adaptados (*matched filters*) son un tipo de filtro óptimo ampliamente utilizados en receptores de radar, receptores de radio, e incluso en procesamiento de imágenes de rayos-X para maximizar la razón señal a ruido entre la señal de interés y el ruido de fondo. Sea $s(t)$ la señal de interés, la salida del filtro adaptado $y(t)$ se calcula a partir de la entrada $x(t)$ y la señal de interés $s(t)$ según:

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} s(T - t + \tau)x(\tau), \qquad 0 \leq t \leq T$$

donde T es la duración de la señal $s(t)$.

   (a) Encuentre una expresión para la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro adaptado.

(b) Sea $s(t) = \wedge\left(\frac{t-2}{2}\right) + \wedge\left(\frac{t-4}{2}\right) - \wedge(t-7)$ la señal emitida por un radar según el esquema que se muestra en la fig. 2. Determine T, grafique $s(t)$ y $h(t)$.

(c) Si la señal a la entrada del filtro en el receptor del radar es $x(t) = s(t-d)+n(t)$ donde $n(t)$ es ruido blanco, obtenga expresiones para la magnitud de los espectros de la entrada $X(\omega)$, la salida $Y(\omega)$, y la magnitud de la respuesta de frecuencias del filtro $H(\omega)$. Asuma que $N(\omega) = c$ (constante), es decir está presente en todas las frecuencias en igual cantidad.

(d) Grafique en forma aproximada cada uno de los espectros de magnitud (X, Y) y respuesta de frecuencia H obtenidos en la pregunta anterior.

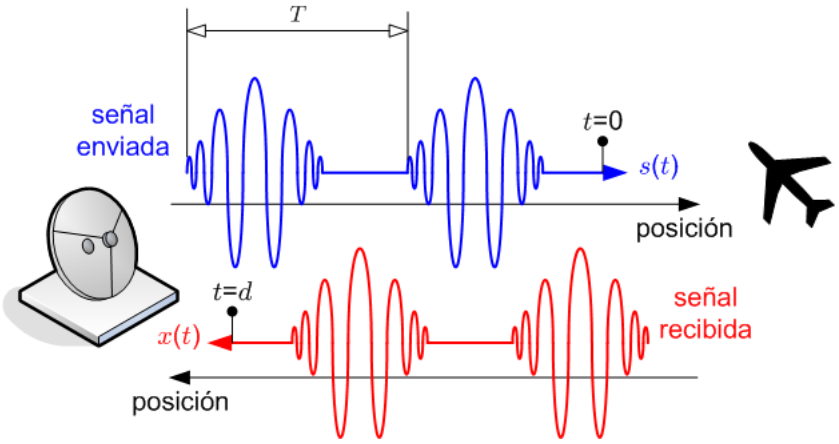


Figura 2: Sistema del problema 2.

3. Pregunta para resolver en computador sobre transformadas de Fourier de tiempo discreto (DTFT) y trasnformadas discretas de Fourier (DFT). Ver indicaciones en enunciado entregado a parte.

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

NOMBRE:

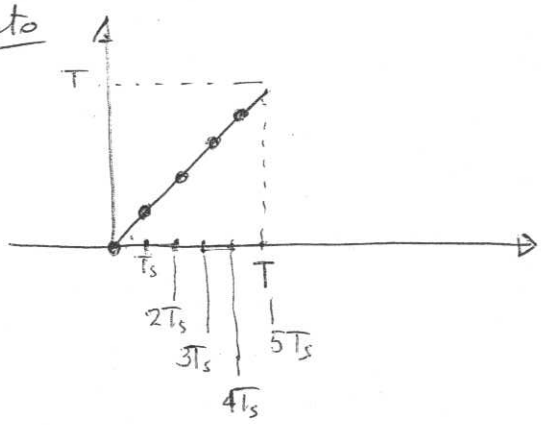
2. Solución Pregunta 2

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

a) 1pto

i)

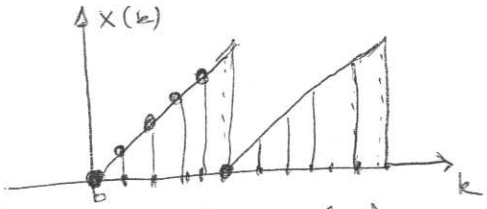


$$N_I T_s = T$$

ii) $$N_s = \frac{T}{T_s}$$

iii) $$N_I T_s = T \rightarrow N_I = \frac{T}{T_s}$$

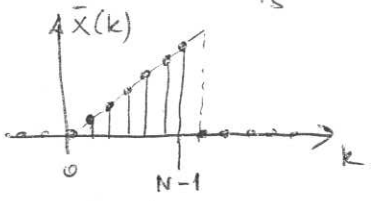
iv)



$$x(k+N) = x(k)$$

$$N = \frac{T}{T_s} = N_s$$

b) 1pto



$$\bar{X}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{x}_k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} k \cdot z^{-k}$$

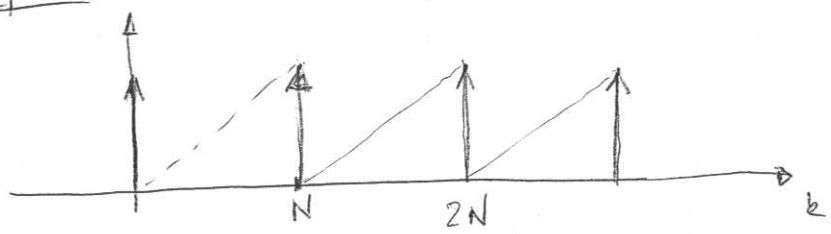
$$= z^{-1} + 2z^{-2} + \ldots + (N-1)z^{-(N-1)}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \ldots + \frac{N-1}{z^{N-1}}$$

$$= \frac{z^{N-2} + 2z^{N-3} + 3z^{N-4} + \ldots + (N-1)}{z^{N-1}}$$

$$\bar{X}(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} i \cdot z^{N-1-i}}{z^{N-1}}$$

c) 1 pto



$$\mathcal{Z}\{\delta_N(k)\} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-iN} \underbrace{\mathcal{Z}\{\delta(k)\}}_{\equiv 1} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-iN}$$

Usando

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{\delta_N(k)\} = \frac{1}{1 - (z^{-N})} = \frac{z^N}{z^N - 1}$$

$$p(z) = z^N - 1 = (z-1) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} z^i$$

d) 0.5 ptos

Sabemos

$$\delta * f = f \quad \Rightarrow \quad \delta * \bar{x}(k) = \bar{x}(k)$$

$$\delta(k-N) * \bar{x}(k) = \bar{x}(k-N) \qquad (1)$$

$$\boxed{x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{x}(k - iN) = \delta_N(k) * \bar{x}(k)}$$

e) 0.5 ptos

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \mathcal{Z}\{\delta_N(k) * \bar{x}(k)\} = \frac{z^N}{z^N - 1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N-1} i z^{N-1-i}}{z^{N-1}}$$

$$= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N-1} i z^{N-1-i}}{\sum_{i=0}^{N-1} z^i}$$

f) 1 pto

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} Y \cdot q(z) = X\, p(z)$$

$$H(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{con} \quad p(z) = \frac{1}{T_s}(z-1)$$

$$q(z) = z^2 - z$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{k+2} - y_{k+1} = \frac{1}{T_s} x_{k+1} - \frac{1}{T_s} x_k}$$

g) 0.5 ptos

$T = 1$, $T_s = 1/4$

k	x_k	$y_k = y_{k-1} + 4x_{k-1} - 4x_{k-2}$
-2	0	0
-1	0	0
0	1	$y_0 = 0 + 4\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0$
1	0	$y_1 = 0 + 4\cdot 1 - 4\cdot 0 = 4$
2	0	$y_2 = 4 + 4\cdot 0 - 4\cdot 1 = 0$
3	0	$y_3 = 0 + 4\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0$
4	0	$y_4 = 0 + 4\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0$
5	0	$y_5 = 0 + 4\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0$

$$\Rightarrow h(k) = 4\delta(k-1)$$

h) 0.5 ptos

$$y(k) = h * x(k) = 4\, x(k-1)$$

porque $h(k) = 4\delta(k-1)$

alternativa

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$T = 1$, $T_s = 1/4$

$$\longrightarrow \underline{\underline{N = 4}} = \frac{T}{T_s}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^2+2z+3}{z^3+z^2+z+1}$$

$$z^2+2z+3 \Longrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

$z^3+z^2+z+1 \;|\, z+1$

z^3+z^2 $\qquad z^2+1$

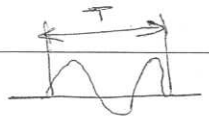
0

$$z^3+z^2+z+1 \rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = \pm j \end{cases}$$

$$Y(z) = 4 \cdot \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}(z-1)} \cdot \frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} \cdot \frac{z^2+2z+3}{z^3+z^2+z+1}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \Rightarrow 4 \times (k-1)$$

NOMBRE:



2. Solución Pregunta 2



a) 1.5 ptos

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} s(T-t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau \quad \hookrightarrow \int_{\langle T \rangle}$$

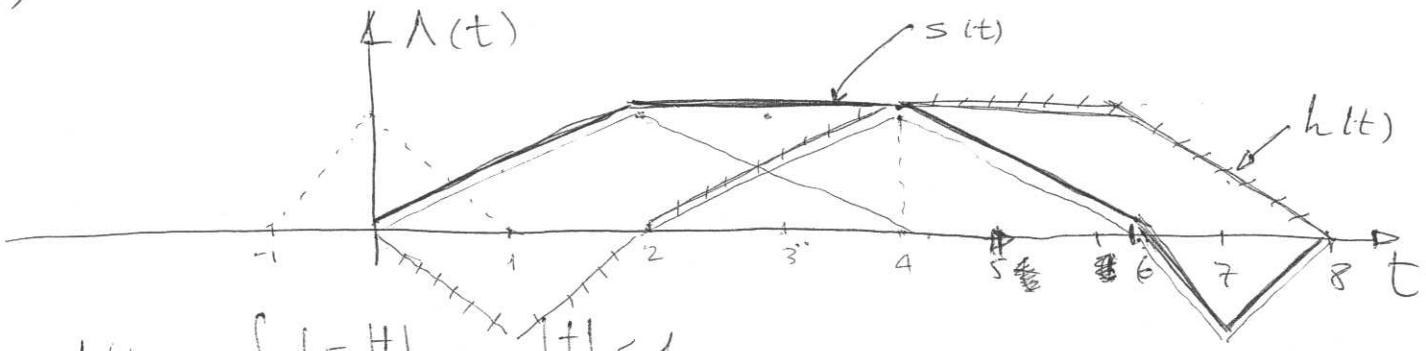
$$h(t-\tau) = s(T-t+\tau), \quad 0 \le (t-\tau) \le T$$

$-(t-\tau)$

Ahora si $\tau = 0$

$$h(t) = s(T-t), \quad 0 \le t \le T$$

b) 1.5 ptos



$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t|<1 \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) \rightarrow \left|\frac{t-2}{2}\right| < 1 \rightarrow |t-2| < 2$$

$$-2 < t-2 < 2$$

$$0 < t < 4$$

$T = 8$ $\qquad h(t) = s(T-t)$

1.5 ptos

c) $x(t) = s(t-d) + n(t)$

$X(\omega)$, $Y(\omega)$, $H(\omega)$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{ s(t-d) + n(t) \}$$

$$= e^{-j\omega d} \mathcal{F}\{ s(t) \} + \mathcal{F}\{ n(t) \}$$

$$= e^{-j\omega d} \left[\mathcal{F}\left\{ \Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) \right\} + \mathcal{F}\left\{ \Lambda\left(\frac{t-4}{2}\right) \right\} + \mathcal{F}\{ \Lambda(t-7) \} \right] + C$$

$\frac{t}{2} - 1$

$\mathcal{F}\{ f(at) \} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ $\quad g(t) = f\left(\frac{t}{2}\right)$

$\mathcal{F}\{ f(t-T) \} = e^{-j\omega T} F(\omega)$ $\quad h(t) = g(t-2)$

$\omega \to \frac{\omega}{a}$ $\quad a = \frac{1}{2} \to \omega = 2\omega$ $\quad \hookrightarrow H(\omega) = e^{-j\omega 2} \cdot G(\omega)$

$= 2 e^{-j\omega 2} \cdot F(2\omega)$

$$= e^{-j\omega d} \left[2 e^{-j\omega 2} \mathcal{F}\left\{ \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) \right\} + e^{-j\omega 4} \mathcal{F}\left\{ \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) \right\} - e^{-j\omega 7} \mathcal{F}\{ \Lambda(t) \} \right] + C$$

$$\mathcal{F}\left\{ \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} = \mathcal{F}\left\{ \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} = \left(\frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right)^2$$

$$= \left(\tau \, \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right)^2 \quad , \underline{\tau = 1}$$

$\Lambda(t) = \Pi\left(t/(\tfrac{1}{2})\right) * \Pi\left(t/(\tfrac{1}{2})\right)$

con $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = e^{-j\omega d}\Big[\underbrace{2e^{-j\omega 2}\operatorname{sinc}^2(\omega) + 2e^{-j\omega 4}\operatorname{sinc}^2(\omega) - e^{-j\omega 7}\operatorname{sinc}^2(\omega/2)}_{S(\omega)}\Big] + c$$

$$Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{s(T-t)\}$$

$g(t) = h(-t)$

$m(t) = g(t-T) = h(T-t)$

$\mathcal{F}\{m(t)\} = \mathcal{F}\{g(t-T)\} = e^{-j\omega T}\mathcal{F}\{g(t)\}$

$$= e^{j\omega T}\mathcal{F}\{s(-t)\}$$

$$= e^{j\omega T}S(-\omega) = e^{-j\omega T}\cdot S^*(\omega)$$

Por lo anterior

$$H(\omega) = e^{-j\omega T}\cdot\left[2e^{j\omega 2}\operatorname{sinc}^2(\omega) + 2e^{j\omega 4}\operatorname{sinc}^2(\omega) - e^{j\omega 7}\operatorname{sinc}^2(\omega/2)\right]$$

$$Y(\omega) = \underbrace{e^{-j\omega T}S^*(\omega)}_{H(\omega)}\cdot\left[e^{-j\omega d}S(\omega) + c\right]$$

$$Y(\omega) = e^{-j\omega(T+d)}\|S(\omega)\|^2 + ce^{-j\omega T}S^*(\omega)$$

$$\|X(\omega)\| = \|\underbrace{e^{-j\omega d}}\, S(\omega) + c\| \leq \|S(\omega)\| + \|c\|$$

$$[\cos(\omega d) - j\sin(\omega d)]\, S(\omega) + c$$

$$\cos(\omega d)\cdot S(\omega) - j\sin(\omega d)\, \underbrace{S(\omega)}_{a+jb} + c$$

$$[a\cos(\omega d) + b\sin(\omega d) + c] + j[b\cos(\omega d) - a\sin(\omega d)]$$

$$\|H(\omega)\| = \|e^{-j\omega T} S^*(\omega)\| = \|S(\omega)\|$$

$$\|Y(\omega)\| = \|H(\omega)X(\omega)\| = \|H(\omega)\|\cdot\|X(\omega)\|$$

$$= \|S(\omega)\|\cdot\|e^{j\omega d} S(\omega) + c\|$$

$$\leq \|S(\omega)\|\,[\,\|S(\omega)\| + \|c\|\,]$$

$$= \|S(\omega)\|^2 + c\|S(\omega)\|$$

$$\|S(\omega)\| = \|2e^{-j\omega 2}\,\mathrm{sinc}^2(\omega) + 2e^{-j\omega 4}\,\mathrm{sinc}^2(\omega) - e^{-j\omega 7}\,\mathrm{sinc}^2(\omega/2)\|$$

$$\leq 2\,\mathrm{sinc}^2(\omega) + 2\,\mathrm{sinc}^2(\omega) + \mathrm{sinc}^2(\omega/2)$$

$$= 4\,\mathrm{sinc}^2(\omega) + \mathrm{sinc}^2(\omega/2)$$

d) 1.5 ptos

