Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 4

23 de Septiembre 2022

Belén Bravo Kunz - bkbravo@uc.cl

Resumen

Transformada de Laplace

Se define la transformada de Laplace bilateral como:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}\ \mathrm{dx}$$

Donde s es una variable compleja de la forma: $s = \sigma + i2\pi u$. Podemos notar que **se obtiene la transformada de Fourier cuando la parte real de la transformada de Laplace vale 0**.

Propiedades de Laplace

1. Escalamiento:
$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$
2. Linealidad:
$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \mathcal{L}\{\alpha f(t)\} + \mathcal{L}\{\beta g(t)\}$$
3. Desplazamiento:
$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$
4. Convolución:
$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$
5. Multiplicación:
$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = F(s) * G(s)$$
6. Modulación:
$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$
$$\mathcal{L}\{cos(\omega t)f(t)\} = \frac{1}{2}F(s-i\omega) + \frac{1}{2}F(s+i\omega)$$

7. Diferenciación:

$$\mathcal{L}\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\} = s^n F(s)$$

8. Integración:

$$\int_{-\infty}^{t} f(\chi) d\chi = \frac{1}{s} F(s)$$

ROC

La región de convergencia se reciere a las **condiciones** que debe tener s para que la transformada de Laplace de una función exista

Laplace inversa

Se trata de encontrar la función original cuya transformada de Laplace es una función dada. Se puede usar:

- Fracciones parciales
- Definición

Recordatorio: la transformada de Laplace NO es dual.

Ejercicios

1. Se conoce la transformada de Fourier de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tal que:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \cos(u^2) \qquad \mathcal{F}\{g(x)\} = sinc\left(\frac{1}{1-u}\right)$$

   Calcule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f * g\}(x)dx$$

2. Considere una función $f(x)$ con transformada de Fourier $F(u)$ y una función aproximaente

$$f_\xi(x) = \int_{-\xi}^{\xi} F(u)e^{i2\pi ux}du$$

   - Demuestre que la función $f_\xi(x)$ se puede escribir como una convolución entre $f(x)$ y una segunda función que depende de x y de ξ llamada $g(x,\xi)$. Determine $g(x,\xi)$ y explique que proceso en la frecuencia representa la función aproximante.
   - Determine:

$$\lim_{\xi\to\infty} g(x,\xi) \qquad \lim_{\xi\to\infty} f_\xi(x)$$

   - Determine $u\xi(t)$ donde u es escalón.

3. Encuentre la ROC de la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$$

4. Encuentre la respuesta al impulso de un sistema cuya respuesta de frecuencia está dada por:

$$H(u) = \begin{cases} e^{-\frac{i\pi}{2}} & \forall u > 0 \\ \\ e^{-\frac{-i\pi}{2}} & \forall u < 0 \end{cases}$$

5. Encuentre la transformada de Laplace de $u(x)$ si u es escalón. Determine la **región de convergenica**.

6. Determine la transformada de Laplace de (considere u como escalón):

$$f(x) = 3u(x) + e^{-6x} + \cos(5x)$$