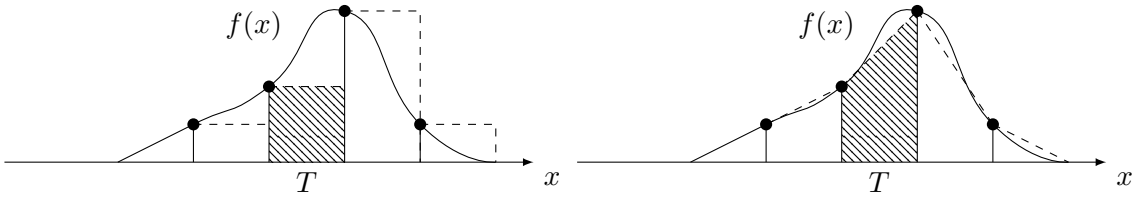
Prueba 3 Solución

1. [6 ptos] *Muestreo.* Para hacer un muestreo de área, se utiliza la función auxiliar de muestreo

$$f_s(x) = \text{Ш}(x/T)f(x)$$

donde el área achurada del gráfico izquierdo corresponde a la magnitud del impulso.



Encuentre una expresión para la función auxiliar de muestreo tal que la magnitud del impulso corresponda al área achurada del gráfico de la derecha.

Solución: El área del trapezoide corresponde al promedio de las áreas de los rectángulos de la muestra y de la que sigue, por lo que, la función auxiliar será

$$f_s'(x) = \frac{1}{2}\text{Ш}(x/T)\left\{f(x) + f(x-T)\right\}$$

2. [6 ptos] *Ultrasonido.* El ultrasonido Doppler se utiliza para medir la velocidad de la sangre. En simple, consiste en enviar un pulso de sonido desde un transductor hacia adentro del cuerpo, el pulso se refleja en la sangre y vuelve al transductor donde se recibe. El tiempo que demora en ir y volver ($\Delta T > 0$) sirve para calcular la distancia al punto de reflexión. El efecto Doppler hace que el pulso se encoja o estire dependiendo de la velocidad de la sangre relativa al transductor ($t \longrightarrow at$). Adicionalmente, el pulso se atenúa en un factor β por la pérdida de energía durante el trayecto.

   Sea $p(t)$ el pulso generado y $q(t)$ el pulso recibido por el transductor.

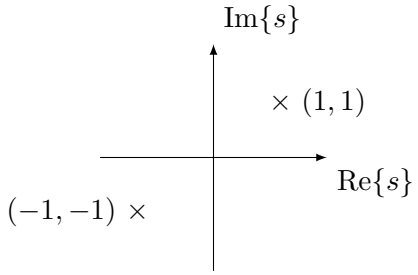
   (a) [3 ptos] Escriba $q(t)$ en función de $p(t)$ y de los parámetros Δt, a y β.
   Solución: Incluyendo los efectos, uno por uno, tenemos:
   - Retardo (ΔT):
   $$q(t) = p(t - \Delta T)$$
   - Atenuación (β):
   $$q(t) = \beta p(t - \Delta T)$$
   - Encogimiento ($t \to at$):
   $$q(t) = \beta p(at - a\Delta T))$$
   Sería erróneo escribir $q(t) = \beta p(at - \Delta T)$ porque el retardo ya no sería ΔT sino que $\Delta T/a$.

   (b) [3 ptos] Si $P(s)$ es la transformada de Laplace de $p(t)$, encuentre $Q(s)$, la transformada de $q(t)$ en función de $P(s)$.

Solución: Empleando propiedades

$$\begin{aligned} \beta p(t) &\longrightarrow \beta P(s) \\ \beta p(t-\Delta T) &\longrightarrow \beta e^{-\Delta T s} P(s) \\ \beta p(a(t-\Delta T)) = q(t) &\longrightarrow \frac{\beta e^{-\Delta T s}}{|a|} P\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

3. [6 ptos] *Laplace inversa.* Se sabe que la transformada de Laplace de una señal es $F(s)$ con $|\sigma| < 1$. Los dos polos de $F(s)$ son los que se indican en la figura.



   (a) [4 ptos] Encuentre una señal $f(t)$ (cualquiera) que tenga esta transformada de Laplace.
   Solución: La forma analítica más sencilla de $F(s)$ con polos en $a = 1 + i$ y $-a$ es

$$F(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \qquad |\sigma| < 1$$

   en cuyo caso $f(t)$ será la inversa de

$$F_1(s) = \frac{1}{s-a} \qquad \sigma < 1 \qquad \longleftarrow f_1(t) = -e^{at} \sqcap(-t)$$

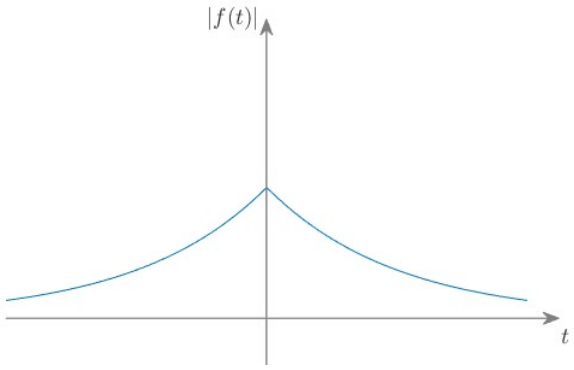
   más la inversa de

$$F_2(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \sigma > -1 \qquad \longleftarrow f_2(t) = e^{-at} \sqcap(t)$$

   o

$$f(t) = -e^{at} \sqcap(-t) + e^{-at} \sqcap(t) = -e^{(1+i)t} \sqcap(-t) + e^{-(1+i)t} \sqcap(t)$$

   (b) [2 ptos] Grafique $|f(t)|$ en función de t.
   Solución: Para $t > 0$, $|f(t)| = |e^{-(1+i)t}| = e^{-t}$ y para $t < 0$, $|f(t)| = |-e^{(1+i)t}| = e^{t}$. En resumen $f(t) = e^{-|t|}$ y su gráfico es



Transformadas de Laplace

$$\sqcap(t) \longrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0 \qquad -\sqcap(-t) \longrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma < 0$$

$$\delta(t) \longrightarrow 1, \quad \forall\sigma \qquad t\sqcap(t) \longrightarrow \frac{1}{s^2}, \quad \sigma > 0$$

$$e^{-at}\sqcap(t) \longrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \sigma > -\mathrm{Re}\{a\} \qquad -e^{-at}\sqcap(-t) \longrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \sigma < -\mathrm{Re}\{a\}$$

$$\mathrm{sen}\,(at)\sqcap(t) \longrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \sigma > 0 \qquad \cos(at)\sqcap(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \sigma > 0$$

$$\mathrm{senh}\,(at)\sqcap(t) \longrightarrow \frac{a}{s^2-a^2}, \quad \sigma > |a| \qquad \cosh(at)\sqcap(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \sigma > |a|$$