IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 2

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2022
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 66
Fecha: 26/09/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (16 pts.) **Causalidad y respuesta de frecuencia en sistemas LTI**. Considere un sistema LTI causal con respuesta al impulso $h(t)$ real y con respuesta de frecuencia $H(u)$.
   (a) (5 pts.) Muestre que $h(t)$ puede ser escrita solo en función de su parte par $h_e(t)$ o bien de su parte impar $h_o(t)$.
   (b) (2 pts.) Muestre que $H(u)$ necesariamente tiene que ser compleja es decir $H(u) = A(u) + iB(u)$, donde $A(u)$ es la parte real de $H(u)$ y $B(u)$ es su parte imaginaria.
   (c) (2 pts.) Muestre que las partes par e impar de la respuesta al impulso son pares de Fourier de las partes real e imaginaria de la respuesta de frecuencia, es decir, $h_e(t) \rightarrow A(u), \quad h_o(t) \rightarrow iB(u)$.
   (d) (4 pts.) La Transformada Hilbert se define como

$$\mathcal{H}\{f\}(x) = \frac{1}{\pi}\textbf{v.p.}\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{x-\lambda} d\lambda\}$$

   donde **v.p.** denota el valor principal. Muestre que $A(u)$ y $B(u)$ están relacionadas entre sí a través de la transformada Hilbert.
   (e) (3 pts.) Si $A(u) = \delta$ encuentre $H(u)$ y la respuesta al impulso $h(t)$.

Solución

(a) Sabemos que las partes par e impar de la respuesta al impulso de un sistema LTI son:

$$h_e(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2}, \quad h_o(t) = \frac{h(t) - h(-t)}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

pero como el sistema es causal $h(t) = 0, t < 0$ y $h(-t) = 0, t > 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

Entonces, para $t < 0$:

$2h_e(t) = h(-t)$ y $2h_o(t) = -h(-t)$, lo que implica que $h_e(t) = -h_o(t)$

Similarmente, para $t > 0$:

$2h_e(t) = h(t)$ y $2h_o(t) = h(t)$, lo que implica que $h_e(t) = h_o(t)$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

$$h_e(t) = h_o(t)\text{sgn}(t), \quad h_o(t) = h_e(t)\text{sgn}(t) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Por lo tanto, es claro que

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) = h_e(t) + h_e(t)\text{sgn}(t) = h_o(t) + h_o(t)\text{sgn}(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Primero supongamos que $h(t)$ fuera par, entonces $H(u)$ sería real par. Si $h(t)$ fuera impar, $H(u)$ sería imaginaria impar. Pero sabemos que $h(t)$ no tiene simetría par o impar, porque el sistema es causal, es decir $h(t)$ es la suma de sus partes par e impar $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$, por lo tanto su respuesta de frecuencia es la combinación de una función real par con otra función imaginaria impar, es decir necesariamente es una función compleja $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

(c) Por las propiedades de simetría de la Transformada de Fourier, si $f(t)$ es real par, entonces $F(u)$ es real par. Por lo tanto es evidente que $h_e(t) \rightarrow A(u)$ $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$ De la misma forma, cuando $f(t)$ es real impar, $F(u)$ es imaginaria impar. Por lo tanto es evidente que $h_o(t) \rightarrow iB(u)$ $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

(d) Tomando la Transformada de Fourier a la parte par de la respuesta al impulso, tenemos

$$\mathcal{F}\{h_e(t)\} = \mathcal{F}\{h_o(t)\} * \mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Es decir,

$$A(u) = iB(u) * \textbf{v.p.}\{\frac{1}{u}\}\frac{1}{i\pi} = \frac{1}{\pi}\textbf{v.p.}\{\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\frac{1}{u-\tau}d\tau\} = \mathcal{H}\{B\}(u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Ahora, tomando la Transformada de Fourier a la parte impar de la respuesta al impulso y multiplicando por $-i$, tenemos

$$-i\mathcal{F}\{h_o(t)\} = -i(\mathcal{F}\{h_e(t)\} * \mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Es decir,

$$B(u) = -i(A(u) * \textbf{v.p.}\{\frac{1}{u}\}\frac{1}{i\pi}) = -\frac{1}{\pi}\textbf{v.p.}\{\int_{-\infty}^{\infty} A(\tau)\frac{1}{u-\tau}d\tau\} = -\mathcal{H}\{A\}(u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Observamos que $A(u)$ y $B(u)$ son pares de la Transformada Hilbert.

(e) Si $A(u) = \delta$, entonces

$$B(u) = -(\delta * \textbf{v.p.}\{\frac{1}{u}\}\frac{1}{\pi}) = -\textbf{v.p.}\{\frac{1}{u}\}\frac{1}{\pi} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por lo que

$$H(u) = A(u) + iB(u) = \delta - i\,\textbf{v.p.}\{\frac{1}{u}\}\frac{1}{\pi} = \delta + \textbf{v.p.}\{\frac{1}{u}\}\frac{1}{i\pi} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y tomando Transformada de Fourier inversa

$$h(t) = 1 + \text{sgn}(t) = 2\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

2. (12 pts.) **Igualdades**. Demuestre la validez de las siguientes igualdades:
   (a) (3 pts.) $(\delta'' + a^2\delta) * \left(\frac{1}{a}\sin(ax)\sqcap(x)\right) = \delta$
   (b) (3 pts.) $\frac{d}{dx}\{\cos(x)\sqcap(x)\} = \delta + \sin(x)\sqcap(x)$
   (c) (3 pts.) $(fT)' = f'T + f'T'$, donde T es una distribución temperada, f una función infinitamente diferenciable, y f' y T' denotan las derivadas de f y T respectivamente.
   (d) (3 pts.) $\frac{d}{dx}\{\cos(\pi x) \sqcap (x)\} = -\pi \sin(\pi x) \sqcap (x)$

Solución

(a) Verdadero, porque

$$\delta'' * \frac{1}{a}\sin(ax)\sqcap(x) + a^2\delta * \frac{1}{a}\sin(ax)\sqcap(x) = \frac{d}{dx^2}\{\frac{1}{a}\sin(ax)\sqcap(x)\} + a\sin(ax)\sqcap(x)$$

$$= \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\{a\cos(ax)\sqcap(x) + \sin(ax)\delta\} + a\sin(ax)\sqcap(x) = \frac{d}{dx}\{\cos(ax)\sqcap(x)\} + a\sin(ax)\sqcap(x)$$

$$= -a\sin(ax)\sqcap(x) + \cos(ax)\delta(x) + a\sin(ax)\sqcap(x) = \cos(0)\delta = \delta \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

(b) Falso, porque

$$\frac{d}{dx}\{\cos(x)\sqcap(x)\} = -\sin(x)\sqcap(x) + \cos(x)\delta = \delta - \sin(x)\sqcap(x) \neq \delta + \sin(x)\sqcap(x) \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

(c) Falso, porque

$$\langle (fT)', \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\{fT\}(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}\{f(x)\}T(x) + f(x)\frac{d}{dx}\{T(x)\}\right)\varphi(x)dx$$

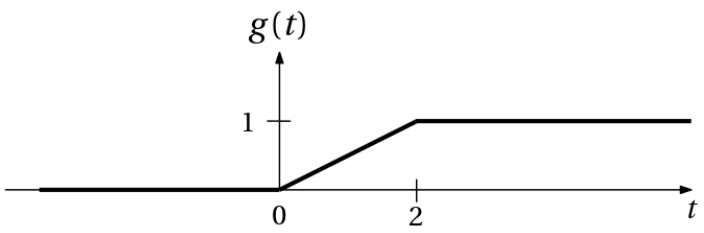
$$= \langle f'T + fT', \varphi\rangle \neq \langle f'T + f'T', \varphi\rangle \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

(d) Verdadero, porque

$$\frac{d}{dx}\{\cos(\pi x) \sqcap (x)\} = -\pi \sin(\pi x) \sqcap (x) + \cos(\pi x)\left(\delta_{\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{-1}{2}}\right)$$

$$= -\pi \sin(\pi x) \sqcap (x) + \cos(\frac{\pi}{2})\delta_{\frac{1}{2}} - \cos(-\frac{\pi}{2})\delta_{\frac{-1}{2}} = -\pi \sin(\pi x) \sqcap (x) \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

3. (12 pts.) **Sistemas**. Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ cuya respuesta $g(t)$ a la entrada $f(t)$ es la función graficada a continuación



Determine y bosqueje, para cada uno de los siguientes sistemas LTI, especificados por sus respuestas al impulso, la salida a cada una de las entradas correspondientes. Si no es posible determinar la salida, expréselo claramente.

Sistema	Entrada	Respuesta al impulso
(a)	$\frac{f(t)}{2}$	$h(t)$
(b)	$f(t-2)$	$h(t+1)$
(c)	$f(t)-f(t-3)$	$h(t)$
(d)	$f(-t)$	$h(-t)$
(e)	$f(-t)$	$h(t)$
(f)	$f'(t)$	$h'(t)$

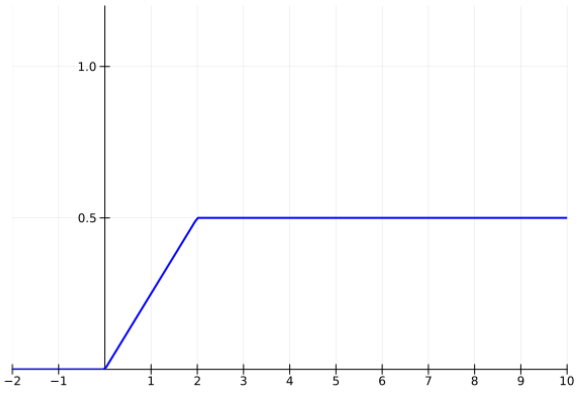
Solución

Sabemos que $g(t) = \{f*h\}(t)$ y por lo tanto, en el dominio de Fourier tenemos $G(u) = F(u)H(u)$.

Sea $w(t)$ la salida de cada uno de los sistemas.

(a) En este caso tenemos

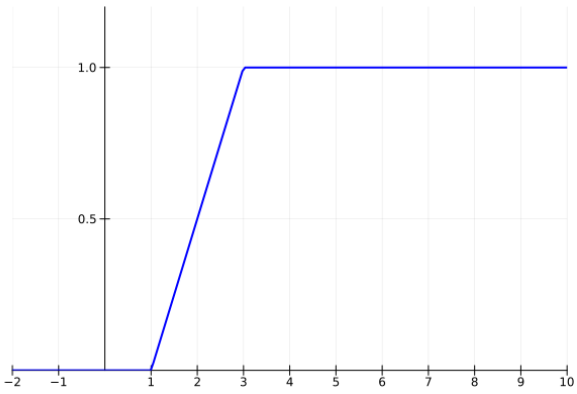
$$W(u) = \frac{F(u)}{2}H(u) = \frac{G(u)}{2} \Rightarrow w(t) = \frac{f(t)}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$



$\rightarrow$ **1 pt.**

(b) En este caso tenemos

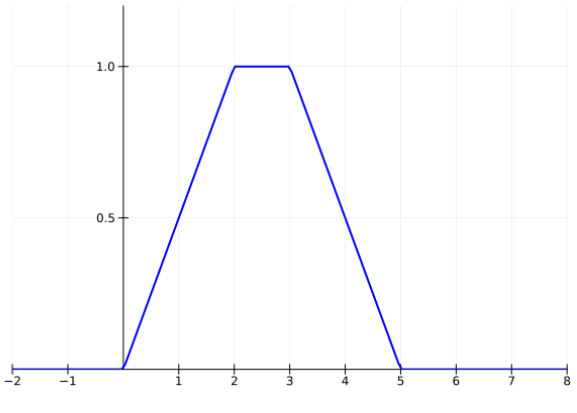
$$W(u) = e^{-i4\pi u}F(u)e^{i2\pi u}H(u) = e^{-i2\pi u}G(u) \Rightarrow w(t) = g(t-1) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$



$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

(c) En este caso tenemos

$$W(u) = (F(u) - e^{-i6\pi u}F(u))H(u) = G(u) - e^{-i6\pi u}G(u) \Rightarrow w(t) = g(t) - g(t-3) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

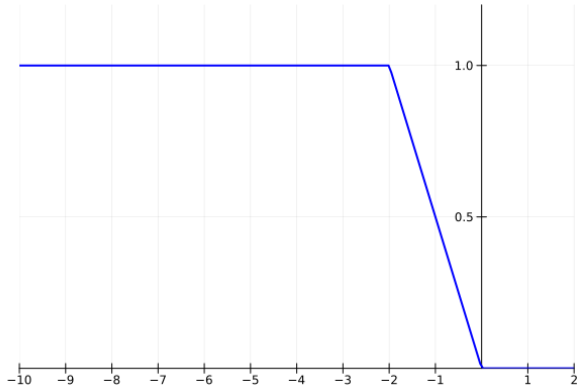


$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

(d) En este caso tenemos

$$W(u) = F(-u)H(-u) = G(-u) \Rightarrow w(t) = g(-t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...



→ **1 pt.**

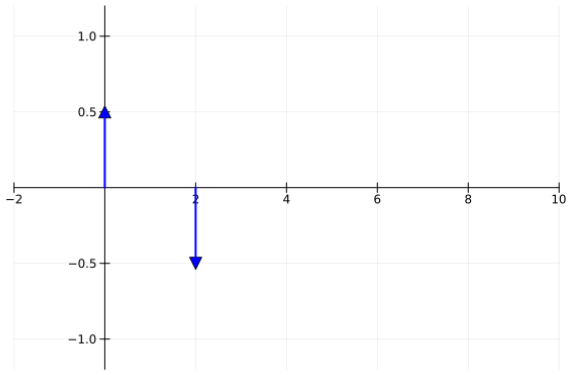
(e) En este caso tenemos

$$W(u) = F(-u)H(u)$$

por lo tanto no es posible determinar la salida, porque no conocemos $f(t)$ → **2 pts.**

(f) En este caso tenemos

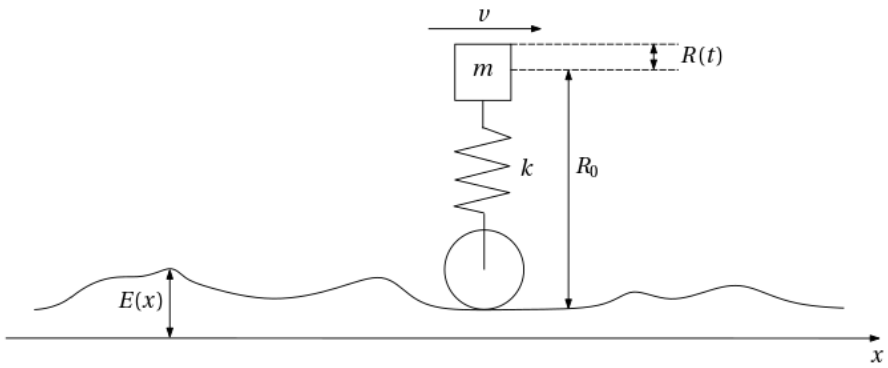
$$W(u) = i2\pi u F(u) i2\pi u H(u) = (i2\pi u)^2 G(u) \Rightarrow w(t) = g''(t) \rightarrow$$ **1 pt.**



→ **1 pt.**

4. (14 pts.) **Camión peligroso**. Considere un camión cuya suspensión se modela mediante un sistema consistente en un resorte con constante k anexado a una masa m en su extremidad superior, como lo muestra la siguiente figura:

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...



Las ruedas anexadas a la parte de abajo del resorte deben moverse a velocidad constante v sobre un camino irregular, cuya altura respecto a un origen fijo se modela mediante una función de la distancia $E(x)$. La altura total del camión $R(t)$ es la salida del sistema, la cual se mide con respecto a la altura del camión en reposo R_0. Asuma que el camión parte del reposo en el tiempo $t = 0$.

(a) (1 pto.) Encuentre una expresión para E en función del tiempo.

(b) (2 pts.) Muestre que el sistema se puede modelar por la siguiente ecuación diferencial

$$R''(t) + \omega^2 R(t) = \omega^2 E(vt)$$

donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. HINT: Las ideas de un señor llamado Newton pueden ser de ayuda!

(c) (2 pts.) Asuma que E es una distribución. Convierta la ecuación diferencial anterior en un problema de convolución aplicable a distribuciones.

(d) (6 pts.) Calcule la respuesta del camión a caminos con los siguientes perfiles. Para cada una de éstos, proponga alguna forma razonable para la función $E(x)$ o la distribución E de manera de poder modelar adecuadamente cada perfil:

i. (2 pts.) Un lomo de toro muy angosto de altura ℓ.

ii. (2 pts.) Una calle plana de altura ℓ.

iii. (2 pts.) Una calle ondulada de altura ℓ y período λ.

HINT: Mire la pregunta 2a.

(e) (3 pts.) Suponga que el camión transporta nitroglicerina y debe cruzar un segmento de calle ondulada. El conductor del camión piensa que lo más seguro es cruzar el segmento a una velocidad muy baja, mientras que el co-piloto piensa que por el contrario lo más seguro es cruzar a una alta velocidad ¿Quién tiene la razón?

Solución

(a) Como el camión va a velocidad constante, $x = vt$, por lo que en cualquier instante del tiempo t las ruedas están a una altura $E(vt)$ $\rightarrow$ **1 pt.**

(b) De acuerdo a la 2da ley de Newton $F = ma$ tenemos

$$mR''(t) = k(E(vt) - R(t)) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

es decir la fuerza debido a la aceleración debe ser igual a la fuerza generada por el resorte.

Reagrupando

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$R''(t) + \frac{k}{m}R(t) = \frac{k}{m}E(vt)$$

y reemplazando $\omega^2 = \frac{k}{m}$ obtenemos

$$R''(t) + \omega^2 R(t) = \omega^2 E(vt) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(c) Para poder operar con distribuciones necesitamos reescribir la ecuación diferencial como convoluciones con impulsos. Entonces

$$\{R * \delta''\} + \{\omega^2 R * \delta\} = \omega^2 E \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y como la convolución es distributiva

$$(\delta'' + \omega^2\delta) * R \ = \omega^2 E \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

De esta manera, E puede ser una distribución y la ecuación diferencial se convierte en un problema de convolución.

(d) En la pregunta 2a está explícitamente formulada la función de Green de la ecuación diferencial (o la respuesta al impulso del sistema), porque al convolucionar esa función con el núcleo $(\delta'' + \omega^2\delta)$ da un impulso. Entonces

$$R(t) = w^2 E(t) * \frac{1}{w}\sin(wt)\sqcap(t) = E(t) * w\sin(wt)\sqcap(t)$$

i. En este caso,

$$E = \ell\frac{\delta}{v} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por la propiedad del escalamiento del impulso. Entonces la salida es

$$R(t) = \ell\frac{\delta}{v} * w\sin(wt)\sqcap(t) = \frac{\ell w}{v}\sin(wt)\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

ii. En este caso, $E(t) = \ell\sqcap(vt) = \ell\sqcap(t)$ $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$ Entonces la salida es

$$R(t) = \ell\sqcap(t) * w\sin(wt)\sqcap(t) = \ell w\left(\sqcap(wt) * \sin(wt)\sqcap(wt)\right)$$

Para resolver esto, primero calculamos

$$\sqcap(t) * \sin(t)\sqcap(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sin(\tau)\sqcap(\tau)\sqcap(t-\tau)d\tau = \int_0^t \sin(\tau)d\tau$$

$$= (-\cos(t) + \cos(0))\sqcap(t) = (1 - \cos(t))\sqcap(t)$$

Entonces, aplicando la propiedad del escalamiento de la convolución

$$\ell\sqcap(t) * w\sin(wt)\sqcap(t) = \ell(1 - \cos(wt))\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

iii. En este caso, $E(t) = \ell \sin(\frac{vt}{\lambda})\sqcap(t) \rightarrow$ **1 pt.** Entonces la salida es

$$R(t) = \ell \sin(\frac{vt}{\lambda})\sqcap(t) * w\sin(wt)\sqcap(t) = \ell w \int_0^t \sin(w\tau)\sin(\frac{v}{\lambda}(t-\tau))d\tau \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

El cálculo de esta integral de convolución no es difícil si se opera con exponenciales complejas, pero requiere de hartos pasos. Solo se requiere ser riguroso y ordenado, porque se trata de integrar exponenciales complejas (las cuales son triviales de integrar) y luego agrupar términos. Para efectos del puntaje, basta con dejar expresada la convolución. Sin embargo, al menos un desarrollo parcial de la integral es necesario para poder responder la parte siguiente de la pregunta. Aquí está el desarrollo completo:

$$R(t) = \ell w \int_0^t \frac{e^{iw\tau} - e^{-iw\tau}}{2i}\frac{e^{i\frac{v}{\lambda}(t-\tau)} - e^{-i\frac{v}{\lambda}(t-\tau)}}{2i}d\tau$$

$$= \frac{-\ell w}{4}\int_0^t \left(e^{i\frac{v}{\lambda}t}e^{i(w-\frac{v}{\lambda})\tau} - e^{-i\frac{v}{\lambda}t}e^{i(w+\frac{v}{\lambda})\tau} - e^{i\frac{v}{\lambda}t}e^{-i(w+\frac{v}{\lambda})\tau} + e^{-i\frac{v}{\lambda}t}e^{-i(w-\frac{v}{\lambda})\tau}\right)d\tau$$

$$= -\frac{\ell w}{4}\int_0^t e^{i\frac{v}{\lambda}t}e^{i(w-\frac{v}{\lambda})\tau}d\tau + \frac{\ell w}{4}\int_0^t e^{-i\frac{v}{\lambda}t}e^{i(w+\frac{v}{\lambda})\tau}d\tau$$

$$+\frac{\ell w}{4}\int_0^t e^{i\frac{v}{\lambda}t}e^{-i(w+\frac{v}{\lambda})\tau}d\tau - \frac{\ell w}{4}\int_0^t e^{-i\frac{v}{\lambda}t}e^{-i(w-\frac{v}{\lambda})\tau}d\tau$$

$$= -\frac{\ell w e^{i\frac{v}{\lambda}t}}{4(i(w-\frac{v}{\lambda}))}(e^{i(w-\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t) + \frac{\ell w e^{-i\frac{v}{\lambda}t}}{4(i(w+\frac{v}{\lambda}))}(e^{i(w+\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t)$$

$$+\frac{\ell w e^{i\frac{v}{\lambda}t}}{4(-i(w+\frac{v}{\lambda}))}(e^{-i(w+\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t) - \frac{\ell w e^{-i\frac{v}{\lambda}t}}{4(-i(w-\frac{v}{\lambda}))}(e^{-i(w-\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t)$$

$$= -\frac{\ell w e^{i\frac{v}{\lambda}t}}{4i(w-\frac{v}{\lambda})}(e^{i(w-\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t) + \frac{\ell w e^{-i\frac{v}{\lambda}t}}{4i(w+\frac{v}{\lambda})}(e^{i(w+\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t)$$

$$-\frac{\ell w e^{i\frac{v}{\lambda}t}}{4i(w+\frac{v}{\lambda})}(e^{-i(w+\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t) + \frac{\ell w e^{-i\frac{v}{\lambda}t}}{4i(w-\frac{v}{\lambda})}(e^{-i(w-\frac{v}{\lambda})t} - 1)\sqcap(t)$$

$$= \frac{\ell w}{4i(w-\frac{v}{\lambda})}(-e^{i\frac{v}{\lambda}t}e^{i(w-\frac{v}{\lambda})t} + e^{i\frac{v}{\lambda}t} + e^{-i\frac{v}{\lambda}t}e^{-i(w-\frac{v}{\lambda})t} - e^{-i\frac{v}{\lambda}t})\sqcap(t)$$

$$+\frac{\ell w}{4i(w+\frac{v}{\lambda})}(-e^{i\frac{v}{\lambda}t}e^{-i(w+\frac{v}{\lambda})t} + e^{i\frac{v}{\lambda}t} + e^{-i\frac{v}{\lambda}t}e^{i(w+\frac{v}{\lambda})t} - e^{-i\frac{v}{\lambda}t})\sqcap(t)$$

$$= \frac{\ell w}{2(w-\frac{v}{\lambda})}\left(\sin(\frac{v}{\lambda}t) - \sin(wt)\right)\sqcap(t) + \frac{\ell w}{2(w+\frac{v}{\lambda})}\left(\sin(\frac{v}{\lambda}t) - \sin(wt)\right)\sqcap(t)$$

$$= \frac{\ell w^2}{w^2 - (\frac{v}{\lambda})^2}\left(\sin(\frac{v}{\lambda}t) - \sin(wt)\right)\sqcap(t)$$

(e) Mirando la respuesta a un camino ondulado, observamos que ésta se indefine cuando $v = \lambda w$. La velocidad del camión menos riesgosa es una que evita estar cerca del valor λw. Probablemente una velocidad muy baja o una muy alta eviten esto, por lo que tanto el conductor como el co-piloto podrían tener la razón $\rightarrow$ **3 pts.**

5. (12 pts.) **Energía en las Series de Fourier.** Suponga una función periódica $\tilde{f}(x)$ de período T que tiene una representación en Series de Fourier. Considere los siguientes sistemas $\tilde{f}(x) \to g(x)$:

1	$g(x) = \frac{d}{dx}\tilde{f}(x)$
2	$g(x) = \int_{x_0}^{x} \tilde{f}(\xi)d\xi$
3	$g(x) = a\tilde{f}(x-\xi),\ a, \xi \in \mathbb{R}$

(a) (4 pts.) Muestre que el sistema 1 dispersa la energía de la entrada hacia los componentes de altas frecuencias.

(b) (4 pts.) Muestre que el sistema 2 concentra la energía de la entrada en los componentes de bajas frecuencias.

(c) (4 pts.) Muestre que el sistema 3 no cambia la distribución de energía de la entrada con respecto a las frecuencias que ésta posee.

Solución

Sabemos que podemos escribir

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi \frac{nx}{T}}$$

Además, sabemos, por el teorema de Parseval-Plancherel, que los coeficientes de las Series de Fourier al cuadrado capturan la energía de la señal en cada frecuencia indexada por n, por lo que si los coeficientes crecen con n, la energía se dispersa hacia las frecuencias altas y si decrecen con n pasa lo contrario.

(a) Aplicando el sistema a $\tilde{f}(x)$:

$$g(x) = \tilde{f}'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{d}{dx}\{e^{i2\pi \frac{nx}{T}}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(i2\pi \frac{n}{T}\right) e^{i2\pi \frac{nx}{T}} \to \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

lo que implica que los coeficientes de $g(x)$ son $g_n = i2\pi \frac{n}{T} c_n$. Vemos que los coeficientes de $\tilde{f}$ son multiplicados por la frecuencia n y a medida que n aumenta, también lo hacen los coeficientes, dispersando la energía hacia las altas frecuencias $\to \boxed{\textbf{2 pts.}}$

(b) Aplicando el sistema a $\tilde{f}(x)$:

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \tilde{f}(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi \frac{n}{T}\xi} d\xi\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{x_0}^{x} e^{i2\pi \frac{n}{T}\xi} d\xi \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Evaluando la integral, tenemos

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{i2\pi \frac{n}{T}} e^{-i2\pi \frac{nx}{T}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{i2\pi \frac{n}{T}} e^{-i2\pi \frac{nx_0}{T}} \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

En la segunda sumatoria el módulo cuadrado del término $e^{-i2\pi \frac{nx_0}{T}}$ es una constante porque se trata de una exponencial compleja evaluada en algún punto del círculo unitario que

La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

depende del valor de x_0, pero que en módulo cuadrado vale 1. Es decir los coeficientes $|g(x)|^2$ son proporcionales a $|\frac{c_n}{i2\pi\frac{n}{T}}|^2$. Vemos que el módulo cuadrado de los coeficientes de $\tilde{f}$ son multiplicados por el inverso de la frecuencia n y a medida que n aumenta, los coeficientes decrecen, concentrando la energía en las bajas frecuencias → **2 pts.**

Esto es coherente con la propiedad de la Transformada de Fourier que intercambia suavidad (el integrador) por decaimiento (la concentración).

(c) Aplicando el sistema a $\tilde{f}(x)$:

$$g(x) = a\tilde{f}(x-\xi) = a\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi\frac{n(x-\xi)}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ac_n e^{i2\pi\frac{n\xi}{T}} e^{-i2\pi\frac{nx}{T}} \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

lo que implica que los coeficientes de $g(x)$ son $g_n = ae^{-i2\pi\frac{n\xi}{T}}c_n$. Vemos que los coeficientes de $\tilde{f}$ conservan la distribución de energía en las frecuencias de la señal de entrada (no dependen de n) → **2 pts.**