IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 3

Prof. Rodrigo F. Cádiz

2do. semestre 2022
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 72
Fecha: 28/10/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- **Responda cada pregunta en hojas separadas y entregue 6 hojas de respuestas, aunque estén en blanco**. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Función de error**. Considere la función de error $\text{erf}(x)$, definida como

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

(a) (3 pts.) Primero muestre que

$$\mathcal{L}_1\{\frac{1}{\sqrt{x}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0$$

(b) (9 pts.) Usando el resultado anterior, encuentre las siguientes transformadas de Laplace unilaterales directas e inversas (considere señales derechas):

i. (3 pts.)

$$\mathcal{L}_1^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+a}}\}$$

ii. (3 pts.)

$$\mathcal{L}_1\{x \,\text{erf}(\sqrt{ax})\}$$

iii. (3 pts.)

$$\mathcal{L}_1\{e^{ax} \,\text{erf}(\sqrt{ax})\}$$

Solución

(a) Utilizamos la definición de la Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}_1\{\frac{1}{\sqrt{x}}\} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-sx} dx$$

Hacemos el cambio de variables $u = st$, $du = sdt$:

$$\mathcal{L}_1\{\frac{1}{\sqrt{x}}\} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{u}} e^{-u} \frac{1}{s} du = \frac{\sqrt{s}}{s} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u} du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Ahora, hacemos el cambio de variables $w = \sqrt{u}$, $dw = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$:

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

$$\mathcal{L}_1\{\frac{1}{\sqrt{x}}\} = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-w^2} 2\sqrt{u}du = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-w^2}dw \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Reconocemos aquí la mitad de la Transformada de Fourier de la función Gauss($\frac{x}{\sqrt{\pi}}$) evaluada en cero, por lo que

$$\mathcal{L}_1\{\frac{1}{\sqrt{x}}\} = \frac{2}{\sqrt{s}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

i. Utilizando la propiedad de la convolución, tenemos que

$$\mathcal{L}_1^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+a}}\} = \mathcal{L}_1^{-1}\{\frac{1}{s}\} * \mathcal{L}_1^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+a}}\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Ahora, aplicando la propiedad del desplazamiento, obtenemos

$$= \sqcap(x) * e^{-ax}\frac{1}{\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-a\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Hacemos el cambio de variable $v^2 = a\tau, 2vdv = ad\tau$ por lo que

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{ax}} e^{-v^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{a}}}\frac{2vdv}{a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{ax}} e^{-v^2}\frac{\sqrt{a}}{v}\frac{v}{a}dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{ax}}\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{a}}dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{erf}(\sqrt{ax}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) (3 pts.) Usando propiedades de Laplace

$$\operatorname{erf}(\sqrt{ax}) \rightarrow \frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{s+a}}$$

por lo que

$$x\operatorname{erf}(\sqrt{ax}) \rightarrow -\frac{d}{ds}\{\frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{s+a}}\} = \sqrt{a}\frac{-2a-3s}{2s^2(a+s)^{3/2}} \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

(c) (3 pts.) Usando propiedades de Laplace

$$\operatorname{erf}(\sqrt{ax}) \rightarrow \frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{s+a}}$$

por lo que

$$e^{ax}\operatorname{erf}(\sqrt{ax}) \rightarrow \frac{\sqrt{a}}{(s-a)\sqrt{s}} \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

2. (12 pts.) **Sistemas discretos**. Considere un sistema LTI discreto con respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2]$.

(a) (3 pts.) Determine el diagrama de bloques del sistema.

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

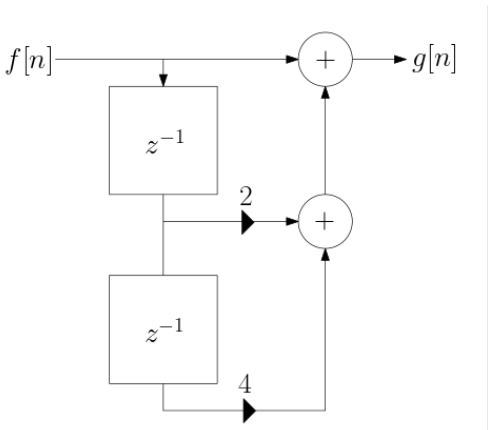
(b) (3 pts.) Encuentre la salida $g[n]$ cuando la entrada es $f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n]$.
(c) (3 pts.) Determine una expresión en variables de estado del sistema.
(d) (3 pts.) Determine la respuesta de frecuencia del sistema.

Solución

(a) Como se trata de un sistema FIR, los coeficientes de la respuesta al impulso son los mismos de la ecuación de diferencias, por lo que

$$g[n] = f[n] + 2f[n-1] + 4f[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces, el diagrama de bloques es:



$\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$

(b) Convolucionamos la entrada con la respuesta al impulso

$$g[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2]) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

expresión que es trivial de calcular por la propiedad del cedazo del impulso

$$g[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sqcap[n-1] + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \sqcap[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) Como el sistema es FIR y no involucra retrasos de la salida no es posible representarlo en variables de estado, al menos no de la forma vista en clases $\rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$

(d) La respuesta de frecuencia es simplemente la DTFT de la respuesta al impulso $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$ Es decir

$$H(u) = 1 + 2e^{-i2\pi u} + 4e^{-i4\pi u} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

3. (12 pts.) **Periodicidades**. Determine si los muestreos de las siguientes señales continuas, con una frecuencia de muestreo 1, resultan en secuencias que son periódicas, y en caso que lo sean, determine su período

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

(a) (4 pts.) $f(t) = \cos\left(\frac{t}{4}\right)$

(b) (4 pts.) $g(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}t\right)$

(c) (4 pts.) $h(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

Solución

Recordamos que el muestreo es simplemente hacer el reemplazo $t = nT$, por lo que en este caso es simplemente $t = n$. Además, para que una función periódica continua siga siendo periódica al muestrearse, la razón entre el período de la señal y el período de muestreo debe ser un número racional.

(a) La frecuencia de la señal u_0 debe cumplir con $2\pi u_0 = \frac{1}{4}$ → **1 pt.** , es decir

$$u_0 = \frac{1}{8\pi} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Como la señal tiene una frecuencia irracional y la frecuencia de muestreo es 1, la señal no es periódica → **2 pts.**

(b) Expandiendo el coseno cuadrado en exponenciales complejas, tenemos

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \left(\frac{e^{i\frac{2}{16}\pi n} + e^{-i\frac{2}{16}\pi n}}{2}\right)^2 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

$$= \frac{e^{i\frac{4}{16}\pi n}}{4} + 2\frac{e^{(i\frac{2}{16} - i\frac{2}{16})\pi n}}{2} + \frac{e^{-i\frac{4}{16}\pi n}}{4} = \frac{\cos(2\pi\frac{1}{8}n)}{2} + 1 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Vemos que la frecuencia de esta señal es $\frac{1}{8}$, es decir un número racional, por lo que esta señal es periódica, de período $N = 8$ → **2 pts.**

(c) En este caso las frecuencias respectivas de las sinusoides son $u_0 = \frac{1}{6}$ y $u_1 = \frac{1}{8}$ → **2 pts.**
Como las frecuencias son racionales, esta señal es periódica de periodo $N = 24$, → **1 pt.**
que es el mínimo común múltiplo de ambos períodos → **1 pt.**

4. (14 pts.) **Propiedades de sistemas discretos**. Considere el siguiente sistema discreto

$$g[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + f[n]$$

(a) (2 pts.) Determine si el sistema es lineal.

(b) (2 pts.) Determine si el sistema es estable.

(c) (2 pts.) Determine si el sistema es invariante.

(d) (2 pts.) Determine si el sistema tiene memoria.

(e) (2 pts.) Determine si el sistema es causal.

(f) (4 pts.) Determine los primeros cuatro coeficientes de la respuesta al impulso del sistema $f[n] \rightarrow g[n]$.

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

Solución

(a) El sistema no puede ser lineal porque no es homogéneo (tiene constantes) → **2 pts.**

(b) El sistema no es estable, la salida crece exponencialmente a medida que n crece → **2 pts.**

(c) El sistema es variante, la salida claramente depende de la muestra n → **2 pts.**

(d) El sistema no tiene memoria, para calcular la salida solo depende de la muestra n → **2 pts.**

(e) El sistema es causal, la salida no anticipa a la entrada → **2 pts.**

(f) Los coeficientes se pueden obtener muy simplemente, dado que el sistema es FIR

$$h[0] = b_0 + 1 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

$$h[1] = b_0 + b_1 + b_2 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

$$h[2] = b_0 + 2b_1 + 4b_2 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

$$h[3] = b_0 + 3b_1 + 9b_2 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

5. (10 pts.) **Muestreo.** Considere la señal

$$f(x) = \wedge(x)$$

(a) (2 pts.) Dibuje el resultado de muestrear esta señal con un período de muestreo $T = 0.25s$

(b) (2 pts.) Dibuje el resultado de muestrear esta señal con un período de muestreo $T = 0.5s$

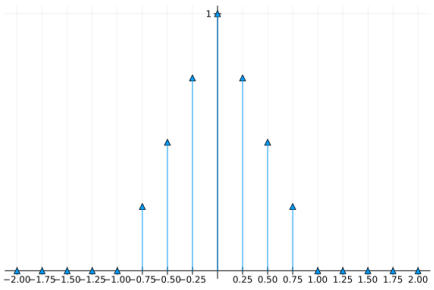
(c) (2 pts.) Dibuje el resultado de muestrear esta señal con un período de muestreo $T = 1s$

(d) (2 pts.) Dibuje el resultado de muestrear esta señal con un período de muestreo $T = 2s$

(e) (2 pts.) Determine si al muestrear esta señal con alguno de los períodos de muestreo anteriores se produce aliasión.

Solución

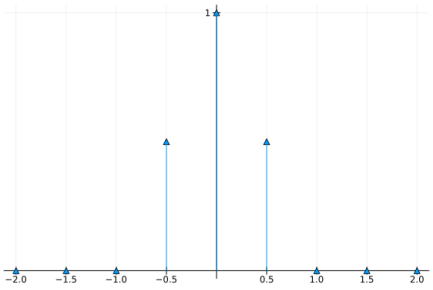
(a)



La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

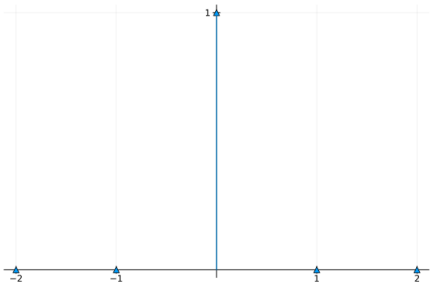
→ **2 pts.**

(b)



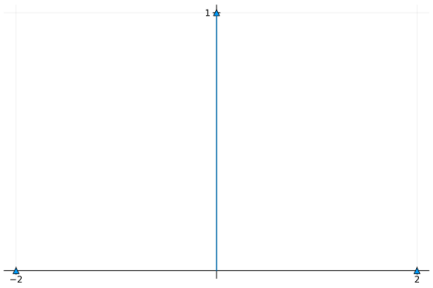
→ **2 pts.**

(c)



→ **2 pts.**

(d)



→ **2 pts.**

(e) Dado que la Transformada de Fourier de $\wedge(x)$ es un sinc, que es de ancho de banda ilimitado, no es posible evitar la aliasión al muestrear esta señal → **2 pts.**

6. (12 pts.) **Sistemas en serie.** Considere dos sistemas conectados en serie, determinados por sus respuestas al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$.

   (a) (8 pts.) Suponga que

$$h_1[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] \text{ y } h_2[n] = \sqcap[n] + \frac{1}{2}\sqcap[n-1]$$

   Calcule la respuesta al escalón del sistema total. Para esto, primero haga la convolución de la en-

La pregunta 6 continúa en la página siguiente ...

trada con el primer sistema y después convolucione este resultado con el segundo sistema. Luego, pruebe que si primero se convolucionan ambas respuestas al impulso, y después se convoluciona la entrada con lo anterior, da el mismo resultado. NOTA: No se puede simplemente invocar propiedades de la convolución, hay que probar éstas propiedades con este ejemplo particular.

(b) (4 pts.) Suponga ahora que

$$h_1[n] = \sin^2(4n) \text{ y } h_2[n] = a^n \sqcap[n],\ |a| < 1$$

Calcule la respuesta a la entrada $f[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$

Solución

(a) Primero convolucionamos

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] * \sqcap[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y ahora

$$\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) * \left(\sqcap[n] + \frac{1}{2}\sqcap[n-1]\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Ahora veamos el otro orden de operaciones. En este caso, primero convolucionamos

$$\left(\sqcap[n] + \frac{1}{2}\sqcap[n-1]\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

es decir, la convolución da $\sqcap[n]$ porque son señales derechas. Luego, convolucionando con la entrada

$$\sqcap[n] * \sqcap[n] = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Observamos que ambas operaciones dan el mismo resultado.

(b) Notamos que

$$h_2[n] * f[n] = a^n \sqcap[n] * (\delta[n] - a\delta[n-1]) = a^n \sqcap[n] - a a^{n-1} \sqcap[n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= a^n \sqcap[n] - a^n \sqcap[n-1] = \delta[n] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Entonces, la salida total es

$$\delta[n] * \sin^2(4n) = \sin^2(4n) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$