Interrogación 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (6 pts.) **Momentos y centroides**. Se define el primer momento de inercia de una función $f(x)$ como

$$f^1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Se define además el centroide de una función $f(x)$ como

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \frac{f^1(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}$$

   (a) (2 pts.) Determine una expresión para $f^1(x)$ en términos de $F(u)$, la Transformada de Fourier de $f(x)$.

   (b) (2 pts.) Determine una expresión para $\langle x \rangle$ en términos de $F(u)$, la Transformada de Fourier de $f(x)$.

   (c) (2 pts.) Encuentre un valor para el primer momento y el centroide de $f(x) = -\uparrow\downarrow(x)$

Solución:

(a) Usando la propiedad de la derivada:

$$F'(u) = \int_{-\infty}^{\infty} -i2\pi x f(x) e^{-i2\pi x u} dx \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

despejando,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-i2\pi x u} dx = \frac{F'(u)}{-i2\pi}$$

Evaluando en $u = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{F'(0)}{-i2\pi} = f^1(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Notamos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ es simplemente la Transformada de Fourier de $f(x)$ evaluada en $u = 0$, es decir $F(0) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$, y usando el resultado anterior:

$$\langle x \rangle = \frac{F'(0)}{-i2\pi F(0)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c)

$$-\uparrow\downarrow(x) \to -i\,\mathrm{sen}\,(\pi u)$$

Entonces $F'(u) = -i\pi\cos(\pi u)$ y evaluada en cero, da

$$F'(0) = -i\pi$$

Por lo tanto, el primer momento es

$$\frac{-i\pi}{-i2\pi} = \frac{1}{2} \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para calcular el centroide, sabemos que $F(0) = 0$, lo que hace que la idea de un centroide para esta función deje de tener sentido. No se puede calcular $\to$ **1 pts.**.

2. (6 ptos.) **Filtro ideal pasa-bajos.** Un filtro ideal de tiempo continuo pasa-bajos, con frecuencia de corte u_c, se define de la siguiente manera en el dominio de Fourier:

$$H(u) = \begin{cases} e^{-i2\pi u t_d}, & |u| \leq u_c \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (2 pts.) Determine una expresión para la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro.
- (2 pts.) ¿Qué puede decir de las respuesta de magnitud y de fase de este filtro?
- (1 pt.) ¿Es este filtro un sistema causal?
- (1 pt.) ¿Es este filtro un sistema estable?

Solución:

(a) Sabemos que podemos descomponer una función compleja en su magnitud y fase de la forma

$$H(u) = |H(u)|e^{i\Theta(u)}$$

donde $\Theta(u)$ es una función de fase o ángulo.
Observamos que $|H(u)| = \sqcap(\frac{u}{2u_c}) \rightarrow$ **1 pts.** y que en la zona de pasa-banda la función de fase es $\Theta(u) = 2\pi t_d u$, por lo tanto lo único que hace el filtro es un desfase lineal de t_d, lo que implica que la respuesta al impulso es simplemente un sinc escalado por $2u_c$, desfasado en t_d, y comprimido en un factor $2u_c$:

$$h(t) = 2u_c \,\text{sinc}\,(2u_c(t - t_d)) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

(b) La respuesta de magnitud es plana (un rect) entre $-u_c < u < u_c \rightarrow$ **1 pts.** y la respuesta de fase corresponde a una fase lineal de pendiente $t_d \rightarrow$ **1 pts.**.

(c) El sistema no es causal por que la respuesta al impulso $h(t) \neq 0$ para $t < 0 \rightarrow$ **1 pts.**.

(d) El sistema no es estable puesto que $|h(t)|$ no es integrable $\rightarrow$ **1 pts.**.

3. (12 pts.) **Módulos y signos.** Considere la función $f(x) = |x|$

   (a) (8 pts.) Determine la validez de la siguiente aproximación en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$|x| \approx -\frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots\right)$$

   (b) (4 pts.) Utilice el resultado anterior para encontrar una aproximación a la función $\text{sgn}(x)$ en el mismo intervalo $[-\pi, \pi]$

Solución:

(a) Expandamos la función $f(x)$ mediante una Serie de Fourier. Como se trata de una función par, podemos expresarla como una combinación lineal de funciones coseno → **1 pts.**. Además, solo basta considerar el intervalo $[0, \pi]$ y multiplicar por 2 → **1 pts.**. Entonces:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(lo cual se podría haber obtenido por simple inspección, ya que corresponde al valor promedio de la función). Ahora, para los otros términos:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\,\text{sen}\,kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ -\frac{4}{k^2\pi}, & k \text{ impar} \end{cases} \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

Por lo tanto, llegamos a la siguiente expansión en Serie de Fourier:

$$|x| \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Notamos que falta el factor $\frac{\pi}{2}$ en la aproximación del enunciado, por lo que ésta no es totalmente válida → **1 pts.**.

(b) Notamos que $\frac{d}{dx}|x| = \text{sgn}(x)$ → **1 pts.**. Además, como $f(x)$ es una función diferenciable, podemos simplemente derivar término a término la expresión anterior → **1 pts.**. Entonces,

$$\text{sgn}(x) \approx \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}\,x + \frac{\text{sen}\,3x}{3} + \frac{\text{sen}\,5x}{5} + \frac{\text{sen}\,7x}{7} + \dots\right) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

4. (8 pts.) **Sistemas y filtros**.

   (a) (4 pts.) Considere un sistema LTI causal con las siguientes propiedades:

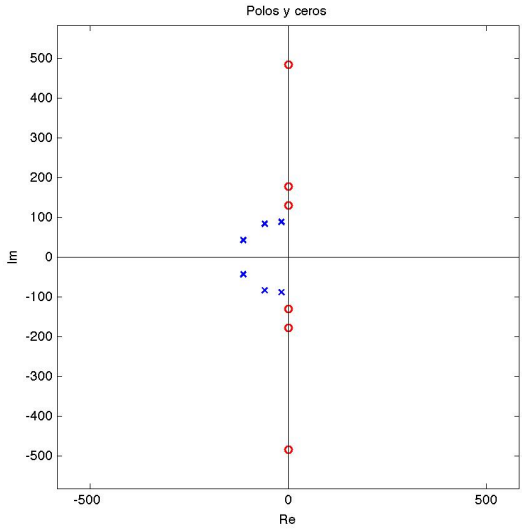
   i. Cuando la entrada es $f(x) = e^{2x}$ para toda x, la salida es $g(x) = \frac{1}{6}e^{2x}$ para toda x.

   ii. La respuesta al impulso $h(x)$ satisface

$$h'(x) + 2h(x) = e^{-4x}\sqcap(x) + b\sqcap(x)$$

   donde b es una constante desconocida. Determine un valor para esta constante b.

   (b) (4 pts.) Considere el sistema $H(s)$, correspondiente a un filtro análogo de Chebyshev de tipo II, determinado por siguiente diagrama de polos y ceros en el plano s.



   i. (1 pt.) Determine si el sistema tiene Transformada de Fourier.

   ii. (3 pts.) Dibuje la magnitud de la respuesta de frecuencia del filtro de la forma más detallada posible.

Solución:

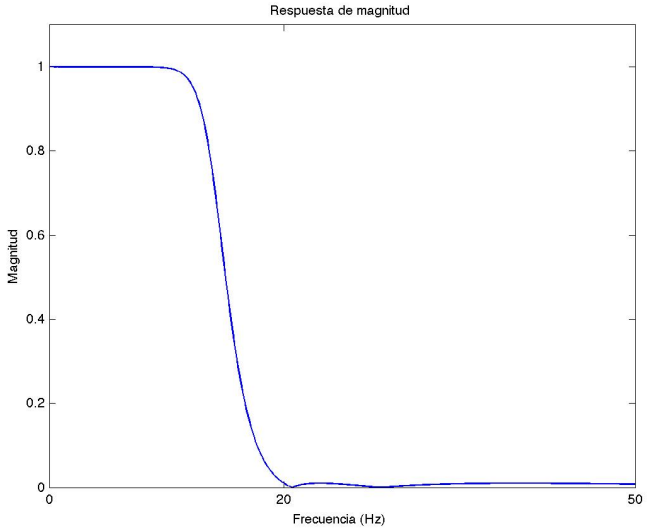
(a) Como $f(x) = e^{2x}$ produce $g(x) = \frac{1}{6}e^{2x}$, podemos deducir que $H(2) = \frac{1}{6} \rightarrow$ **1 pts.**
Además, analizando la ecuación diferencial, sabemos que

$$H(s) = \frac{s + b(s+4)}{s(s+4)(s+2)} \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

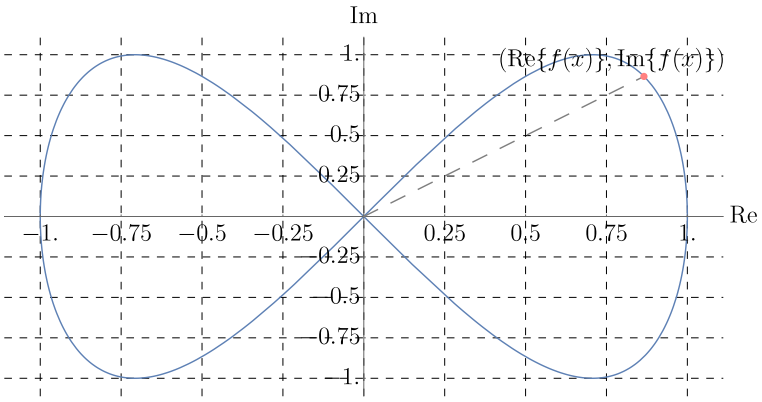
Evaluando en $s = 2$, determinamos que $b = 1 \rightarrow$ **1 pts.**.

(b) i. Asumiendo un sistema causal, como la ROC está a la derecha del polo más a la derecha, ésta incluye al eje imaginario, por lo que la Transformada de Fourier existe $\rightarrow$ **1 pts.**.

ii. La forma del filtro es claramente un pasabajos, dado que los polos cercanos al cero, enfatizan esa zona de frecuencia → **1 pts.**. Su formación en forma de elipse, hace que la respuesta de frecuencia cerca de 0 sea plana → **1 pts.**. Y los ceros tienen la función de hacer decaer la magnitud de la respuesta de frecuencia para las frecuencias altas → **1 pts.**. El gráfico de la magnitud de la respuesta de frecuencia, se muestra a continuación:



5. (10 pts.) **Lemniscata de Bernoulli.** El símbolo de "infinito" es una curva paramétrica como la que sigue:



En el contexto de esta pregunta se analiza la función $f(x)$ de periodo 2π que describe ésta curva.

(a) (2 pts.) Encuentre una expresión analítica para $f(x)$ a partir de la figura anterior (utilice senos y cosenos).

(b) (4 pts.) Escriba la serie de Fourier compleja y encuentre sus coeficientes C_n.

(c) (2 pt.) Haga lo mismo que en el inciso b) para $g(x) = f(a(x-b))$.

(d) (2 pt.) Calcule la potencia media de la señal $g(x)$.

Solución:

(a) Por inspección podemos ver que $f(x) = \cos(x) + i\sin(2x) \rightarrow$ **2 pts.**.

(b) Luego la serie de Fourier compleja será

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[e^{ix} + e^{-ix} + e^{i2x} - e^{-i2x}\right], \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

con coeficientes

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

y

$$C_2 = -C_{-2} = \frac{1}{2}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Por un lado, las expansiones o dilataciones no varían los coeficientes de la serie de Fourier solo su frecuencia fundamental. Por otro los desplazamientos agregarán un factor

$$\hat{C}_n = C_n e^{-i2\pi nx/a} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

a los nuevos coeficientes $\hat{C}_n$.

(d) La potencia media de la señal no depende de los desplazamientos ni dilataciones temporales, luego

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{P}} &= \sum_{n=-2}^{2} \|C_n\|^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 1. \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}\end{aligned}$$

Notamos que usar $\hat{C}_n$ o C_n es equivalente por las razones ya mencionadas.

6. (8 pts.) **Resonancia magnética.** La señal de MRI es equivalente a la suma de *spins* en un volumen (o $\int$ *spins* $\mathrm{d}x$). Estos se representan como exponenciales complejas que varían su fase al cambiar los gradientes magnéticos $G(t)$ de la siguiente forma

$$\textit{Spin: } e^{i\phi}, \quad \phi = \gamma \int_0^\infty x(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t.$$

Siendo la señal de MRI sensible al movimiento de los *spins* $x(t)$.

(a) (2 pts.) Si se tiene $G(t) = G_0 [\delta(t) - \delta(t - \Delta t)]$, calcule la fase del *spin*. Utilice la notación $x \overset{\text{def.}}{=} x(\Delta t)$ y $x_0 \overset{\text{def.}}{=} x(0)$.

(b) (4 pts.) Determine una fórmula para la señal de MRI si sabe que cada *spin* tiene una probabilidad de desplazarse $p(\Delta x)$ con $\Delta x = x - x_0$.
Hint: Defina una variable auxiliar $q = \gamma G_0 / (2\pi)$ y escriba la señal $S(q) = \int \text{spins}\, \mathrm{d}x$ en función de q.

(c) (2 pts.) Para el caso de difusión libre la probabilidad de desplazamiento es

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{4\mathrm{D}t}\right).$$

¿Cuál es la señal de resonancia magnética en ese caso?

Solución:

(a) Utilizando la propiedad del cedazo de la distribución δ, podemos escribir $\phi = \gamma G_0 (x - x_0) \rightarrow$ **1 pts.** para el gradiente descrito, por lo que un *spin* quedará

$$e^{i\phi} = e^{-i\gamma G_0 (x - x_0)}. \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

(b) Primero escribamos la señal sin usar la notación

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} p(x - x_0)\, e^{-i\gamma G_0 (x - x_0)} \mathrm{d}x. \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Como estamos integrando en la recta real, el valor S será el mismo sin importar $x_0 \rightarrow$ **1 pts.**, además podemos usar la variable auxiliar de tal modo que la expresión de señal se simplifica

$$S(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, e^{-i2\pi q x} \mathrm{d}x. \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Que no será nada más que la transformada de Fourier de p evaluada en q, es decir,

$$S(q) = P(q). \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

(c) Escribimos esta función en términos de señales importantes

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \mathrm{Gauss}\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}}\right), \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

por lo que su transformada de Fourier es

$$S(q) = \mathrm{Gauss}\left(\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}\, u\right). \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

7. BONUS (4 pts.) **ESCOJA SOLO UN PROBLEMA**.

   (a) (4 pts.) Calcule el valor de la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^3(x)}{x^3} dx$$

   (b) (4 pts.) Sea $f(x)$ una función imaginaria y par, con Transformada de Fourier $F(u)$. Sea $G(u)$ la Transformada de Fourier de $g(x) = f(x-a)$. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Re\{G(x)\} dx$$

Solución:

(a) Primero, escribimos

$$\frac{\text{sen}^3(x)}{x^3} = \text{sinc}\,(\frac{x}{\pi})\,\text{sinc}^2(\frac{x}{\pi}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Utilizando el teorema de Parseval, podemos calcular fácilmente esta integral en el dominio de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^3(x)}{x^3} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \pi \sqcap(\pi u)\pi \wedge(\pi u) du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$= \pi^2 \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \left(\frac{\sqcap(\pi u)}{2} + \frac{\wedge(2\pi u)}{2} \right) du = \pi^2 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \right) = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) Como $f(x)$ es imaginaria y par, su Transformada de Fourier $F(u)$ también será imaginaria y par $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$, es decir podemos escribir $F(u) = i|F(u)|$. Además,

$$G(u) = e^{-i2\pi au} F(u) = ie^{-i2\pi au}|F(u)| \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Usando el Teorema de Euler,

$$G(u) = i\cos(2\pi au)|G(u)| + \text{sen}\,(2\pi au)|G(u)| \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando la parte real,

$$Re\{G(u)\} = \text{sen}\,(2\pi au)|G(u)|$$

Se observa que esta función es impar, por lo que su integral da cero $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$