Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 2–2010 — Vicente Parot

Documento #11

Interrogación 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] **DFT.** Si se tiene el par DFT $(a,b,c,d) \longrightarrow (A,B,C,D)$ ¿cuál es la transformada de $(a,b,c,d,-a,-b,-c,-d)$?

   Resultado:

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) &\longrightarrow (A,B,C,D)\\ (c,d,a,b) &\longrightarrow (A,-B,C,-D)\\ (c,d,0,0,0,0,a,b) &\longrightarrow (A,X_1,-B,X_3,C,X_5,-D,X_7)/2\end{aligned}$$

   Donde X_n son los valores de la interpolación debida al acolchamiento, que se podrían calcular usando la definición DFT. En términos de (a,b,c,d),

$$X_n = \frac{1}{4}\left(ce^{-\frac{i2\pi 0n}{8}} + de^{-\frac{i2\pi 1n}{8}} + ae^{-\frac{i2\pi 6n}{8}} + be^{-\frac{i2\pi 7n}{8}}\right)$$

$$\begin{aligned}(a,b,c,d,0,0,0,0) &\longrightarrow (A,iX_1,B,-iX_3,C,iX_5,D,-iX_7)/2\\ (0,0,0,0,a,b,c,d) &\longrightarrow (A,-iX_1,B,iX_3,C,-iX_5,D,iX_7)/2\\ (a,b,c,d,-a,-b,-c,-d) &\longrightarrow (0,iX_1,0,-iX_3,0,iX_5,0,-iX_7)\end{aligned}$$

2. [4 ptos] **Z.** Calcule la transformada Z de $g[n] = a^{|n|}$. Indique su región de convergencia. ¿Qué condición debe cumplir a para que la transformada exista?

   Resultado:

$$\begin{aligned}g[n] &= (...,a^3,a^2,a,\underline{1},a,a^2,a^3,...)\\ G(z) &= ... + a^3z^3 + a^2z^2 + az + 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + ...\\ G(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{-n}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}} \qquad |az^{-1}| < 1, \quad |a| < |z|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (az)^n = \frac{az}{1-az} \qquad |az| < 1, \quad |z| < \frac{1}{|a|}$$

$$G(z) = \frac{az}{1-az} + 1 + \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}} \qquad |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

Para que la transformada exista, la región de convergencia no debe ser nula,

$$|a| < \frac{1}{|a|}$$
$$|a|^2 < 1$$
$$|a| < 1$$

3. [6 ptos] **Z.** Encuentre un par de tranformada Z: $g[n] \longrightarrow G(z)$ de modo que simultáneamente $G(z)$ tenga región de convergencia $\frac{1}{2} < |z| < 2$ y $g[n]$ tenga media cero.

   Resultado: Partiendo de un par conocido,

$$a^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |az^{-1}| < 1$$

$$a^{-n} \sqcap[-n] \longrightarrow \frac{1}{1-az} \qquad |az| < 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \frac{1}{2} < |z|$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sqcap[-n] \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} \qquad |z| < 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sqcap[-n] \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} + \delta[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

   El último par de transformada Z tiene la región de convergencia requerida. Si además sumamos un impulso, la región de convergencia no se modifica y se puede obtener una señal de media cero. La magnitud del impulso se puede calcular haciendo $G(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] = 0$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} + \delta[n] + A\delta[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} + A \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$\left.\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}+A\right|_{z=1}=0$$
$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+A=0$$
$$A=-4$$

Con esto, un par que cumple las condiciones es

$$g[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}-3\delta[n]$$
$$G(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}-4$$

4. [4 ptos] **Z inversa.** $F(z)$, donde c es una constante compleja distinta de cero, converge en $|z|\neq 0$. Determine su transformada Z inversa $f[n]$.

$$F(z)=\frac{1-c^{64}z^{-64}}{1-cz^{-1}}$$

Resultado: Como la región de convergencia contiene a la circunferencia $|z|=|c|$, entonces se sabe que el polo $z=c$ debe cancelarse. De hecho, $F(z)$ es una suma geométrica y al escribirlo de esa forma no aparece el polo $z=c$. Usando $\sqcap[0]=1$,

$$\begin{aligned}f[n]=\mathrm{IZT}\{F(z)\}&=\mathrm{IZT}\{\sum_{k=0}^{63}c^kz^{-k}\}\\&=\sum_{k=0}^{63}c^k\mathrm{IZT}\{z^{-k}\}\\&=\sum_{k=0}^{63}c^k\delta[n-k]\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\sqcap[k]-\sqcap[k-64])c^k\delta[k-n]\\&=c^n(\sqcap[n]-\sqcap[n-64])\end{aligned}$$

$f[n]\neq 0$ para $0<n<64$. Esto explica que converja en todo z excepto el origen.

5. [6 ptos] **Muestreo.** Un sonido pasa por un sistema en el cual se muestrea a 44 KHz y luego se graba en un CD. Si el sonido consiste en un tono puro de 60 KHz, ¿Cómo será el sonido almacenado en el CD?

Resultado: Producto de la aliasión, el sonido se verá modificado. En frecuencia, la señal se verá replicada como resultado de convolucionar con impulsos cada 44 KHz. El muestreo a 44 KHz implica conservar frecuencias hasta 22 KHz. Dentro de este rango,

habrá réplicas en $-44+60=16$ KHz. El sonido almacenado tendrá un tono puro, de 16 KHz. Si la señal original es $f(t)=\cos(2\pi\,60000\,t)$, al muestrearla a 44 KHz se tiene $t=n\frac{1}{44000}$ y la señal almacenada es equivalente a tomar muestras a 44 KHz de un tono puro de 16 KHz.

$$\begin{aligned}
f[n] &= \cos(2\pi\,60000\,t)|_{t=n\frac{1}{44000}} \\
&= \cos(2\pi\,60000\,n\frac{1}{44000}) \\
&= \cos(2\pi n + 2\pi\,16000\,n\frac{1}{44000}) \\
&= \cos(2\pi\,16000\,n\frac{1}{44000}) \\
&= \cos(2\pi\,16000\,t)|_{t=n\frac{1}{44000}}
\end{aligned}$$

6. [4 ptos] **Sistema discreto.** Considere el sistema lineal e invariante con función de transferencia

$$H(z)=\frac{2z^2+1}{2z-1},$$

Su región de convergencia está dada por el intervalo semiabierto $|z|\in[\frac{1}{2},\infty)$

a) [1 ptos] Encuentre su respuesta al impulso $h[n]$.

b) [1 ptos] Encuentre una ecuación de diferencias que lo describa.

c) [2 ptos] ¿El sistema es causal?

Resultado:

a) Se puede resolver de varias formas, una de ellas es usando convolución:

$$H(z)=\frac{2z^2+1}{2z-1}=\frac{z+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(z+\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} &\longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] \\
z+\frac{1}{2}z^{-1} &\longrightarrow \left(1,\underline{0},\frac{1}{2}\right)=\delta[n+1]+\frac{1}{2}\delta[n-1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] * \left(\delta[n+1]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sqcap[n+1] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sqcap[n-1] \\
&= \delta[n+1]+\frac{1}{2}\delta[n]+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sqcap[n+1]
\end{aligned}$$

b) La ecuación de diferencias:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z^2+1}{2z-1}$$
$$(2z-1)Y(z) = (2z^2+1)X(z)$$

$$2y[n+1] - y[n] = 2x[n+2] + x[n]$$
$$2y[n] - y[n-1] = 2x[n+1] + x[n-1]$$
$$y[n] = x[n+1] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

c) El sistema no es causal. En la ecuación de diferencias se ve que la salida depende de valores pasados y futuros de la entrada, por lo que este sistema no puede existir con n indicando el tiempo, ya que anticiparía el futuro. Lo mismo se puede ver en la respuesta al impulso, hay valores distintos de cero para $n < 0$. También se puede saber a partir de la función de transferencia, para ser causal debe incluir desde el último polo hacia afuera, pero en este caso hay un polo en $|z| = \infty$.