Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 5

Fecha de entrega: 10 de abril de 2022

---

1. Defina el concepto *espectro* y establezca que relación tiene con la serie y la transformada de Fourier.

   En términos científicos, el espectro de frecuencia es la distribución de amplitudes para cada frecuencia de un fenómeno.

   Esto se relaciona con la transformada de Fourier porque lo que la transformada entrega es la distribución de frecuencias de una señal, es decir, al calcular la transformada de Fourier de una señal encontramos su espectro.

2. Estudie y enuncie 4 propiedades de la transformada de Fourier:

   A continuación, se considerará que $F(u)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$:

   a) Dualidad:

   $$\mathcal{F}\{F(u)\} = f(-x)$$

   b) Linealidad:

   $$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha F(u) + \beta G(u)$$

   c) Escalamiento:

   $$\mathcal{F}\{f(\alpha x)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{u}{\alpha}\right)$$

   d) Desplazamiento:

   $$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-i2\pi a u} F(u)$$

   e) Convolución:

   $$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(u)G(u)$$

   f) Potencia:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)\ \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G^*(u)\ \mathrm{dx}$$

g) Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \, \mathrm{dx}$$

h) Autocorrelación:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) f(\epsilon + x) \, \mathrm{d}\epsilon\right\} = |F(u)|^2$$

i) Derivada:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i2\pi u F(u)$$

3. Demuestre la propiedad del desplazamiento de la transformada de Fourier.

Para desarrollar esto, es necesario usar la definición, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{i2\pi u x} dx$$

Para resolver la integral, hacemos un cambio de variable. Definimos:

$$b = x - a \qquad x = b + a \qquad db = dx$$

Reemplazando la nueva variable en la integral obtenemos:

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(b) e^{i2\pi u (b+a)} db$$

A continuación, uso propiedades de las potenicas, tal que:

$$e^{-i2\pi u (b+a)} = e^{-i2\pi u b} e^{-i2\pi u a}$$

Sustituyo la exponencial descompuesta en la integral:

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(b) e^{-i2\pi u b} e^{-i2\pi u a} db$$

Notemos que $e^{-i2\pi u a}$ no contiene la variable de integración, por lo que podemos sacarla de la integral luego:

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-i2\pi u a} \int_{-\infty}^{\infty} f(b) e^{-i2\pi u b} db$$

Ahora, el término de la integral es la transformada de Fourier de $f(b)$ llevada al dominio u, luego:

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-i2\pi au}F(u)$$

4. Encuentre la transformada de Fourier de:

$$f(x) = \frac{1}{2}\text{sinc}(x+2) - e^{i6\pi x} \wedge \left(\frac{x}{7}\right)$$

Para desarrollar esto, utilizamos propiedades de Fourier, en primer lugar, dado que Fourier es lineal lo aplicamos a toda la ecuación:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\text{sinc}(x+2) - e^{i6\pi x} \wedge \left(\frac{x}{7}\right)\right\}$$

Luego, usamos linealidad nuevamente para separar la suma, sacar las constantes y llegar a la transformada de Fourier de algo conocido:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\text{sinc}(x+2)\} - \mathcal{F}\left\{e^{i6\pi x} \wedge \left(\frac{x}{7}\right)\right\}$$

Sabemos que la transformada de fourier de sinc es $\sqcap$ por lo que aplicamos al primer término propiedad del desplazamiento:

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}(x+2)\} = e^{i4\pi u} \sqcap (u)$$

Luego:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2}e^{i4\pi u} \sqcap (u) - \mathcal{F}\left\{e^{i6\pi x} \wedge \left(\frac{x}{7}\right)\right\}$$

A continuación resolvemos el segundo término. Para esto, consideramos que triángulo es la autoconvolución de rect, por lo tanto puedo calcular su transformada de Fourier:

$$\wedge(x) = \sqcap(x) * \sqcap(x)$$

Aplicando Fourier a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x) * \sqcap(x)\}$$

Utilizando propiedad de la convolución:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x)\}\mathcal{F}\{\sqcap(x)\}$$

Dado que $\mathcal{F}\{\sqcap(x)\} = \text{sinc}(u)$:

$$\mathcal{F}\{\wedge(x)\} = \text{sinc}^2(u)$$

Con esto en mente podemos resolver $\mathcal{F}\left\{e^{i6\pi x} \wedge \left(\frac{x}{7}\right)\right\}$. Considerando propiedad del escalamiento y del desplazamiento tendremos:

$$\mathcal{F}\left\{e^{i6\pi x} \wedge \left(\frac{x}{7}\right)\right\} = 7\text{sinc}^2\left(7u + 42\right)$$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación principal se obtiene finalmente que:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2}e^{i4\pi u} \sqcap (u) - 7\text{sinc}^2\left(7u - 21\right)$$

5. Explique los conceptos *ancho de banda limitado* y *ancho de tiempo limitado*

   Una señal tiene **ancho de tiempo limitado** si tiene una duración no infinita, es decir tiene un inicio y un final acotado. Toda señal de ancho de tiempo limitado se puede modelar como una multiplicación entre la señal y un rect correctamente escalado y desplazado.

   Por otro lado, una señal tiene **ancho de banda limitado** si su espectro tiene una frecuencia mínima y una frecuencia máxima ambas no infinitas. La señal de ancho de banda limitado se puede modelar como una multiplicación en frecuencia entre la transformada de Fourier de la señal y un $\sqcap(u)$ correctamente escalado y desplazado.

6. Determine si una señal puede a la vez tener ancho de tiempo y ancho de banda limitado. Demuestre.

   Una señal no puede tener ancho de tiempo y ancho de banda limitado a la vez.

   Consideremos cualquier señal de ancho de tiempo limitado entre -0.5 y 0.5. Esta se puede escribir como:

   $$f(x) = \sqcap(x)f(x)$$

   Solo estamos multiplicando por uno, porque la señal ya es acotada en el intervalo del rect.

   Ahora, para saber como se comporta su espectro, tomamos transformada de Fourier:

   $$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x)f(x)\}$$

   Por propiedad de la convolución tendremos que:

   $$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x)\} * \mathcal{F}\{f(x)\}$$

Consideremos ahora que $\mathcal{F}\{\sqcap(x)\} = \text{sinc}(u)$. Notemos que la Transformada de Fourier de $f(x)$ es una convolución con una función infinita, lo que hace al resultado infinito. Por lo tanto, **toda señal acotada en el tiempo es infinita en frecuencia**.Esto también se cumple entre la frecuencia, por propiedad de dualidad de la transformada de Fourier.