Examen SOLUCIÓN

1. Encuentre la solución a la siguiente ecuación diferencial: $y'(t) + 2y(t) = 2\sqcap(t)$ con $t > 0$.
   Resultado: Empleando la transformada de Laplace, tenemos

$$sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s+2)Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

Cuya transformada de Laplace inversa es

$$y(t) = (1 - e^{-2t})\sqcap(t)$$

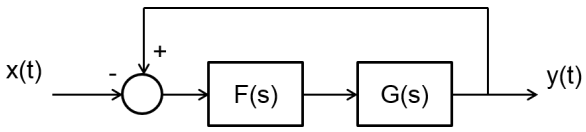
2. Si $f(x) \longrightarrow F(u)$, encuentre la transformada de Fourier de la parte par de $f(x)$.
   Resultado: La parte par de $f(x)$ es $\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x)$ de donde

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \longrightarrow \frac{1}{2}(F(u) + F(-u))$$

Es decir, la parte par de $F(u)$.
3. Dibuje el diagrama de bloques de un sistema formado por dos subsistemas $F(s)$ y $G(s)$, cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{F(s)G(s)}{F(s)G(s) - 1}.$$

   Resultado: Claramente corresponde a la función de transferencia de un sistema realimentado



4. Se tiene un sistema causal cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)},$$

con K constante. Si la entrada al sistema es un escalón, encuentre el valor final al cual tiende la salida del sistema.
   Resultado: Como la transformada de Laplace del escalón es $1/s$ la salida del sistema será

$$Y(s) = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)}\frac{1}{s}$$

Para encontrar el valor final ocupamos el teorema del valor final

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

es decir

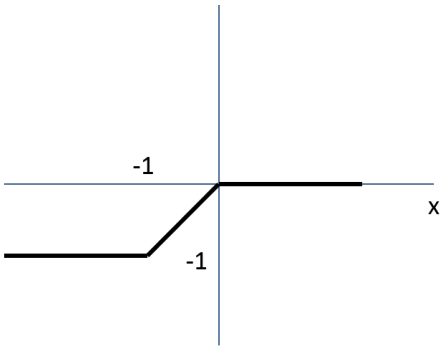
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{KF(s)}{1 + KF(s)}\frac{1}{s} = \frac{KF(0)}{1 + KF(0)}$$

5. Se tiene un sistema lineal y variante cuya respuesta al impulso es $h(x,\xi) = \sqcap(x-\xi) - \sqcap(-\xi)$. Encuentre y grafique la salida del sistema si la entrada es $\sqcap(x+1/2)$.

Resultado: La salida será la integral de superposición

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)h(x,\xi)\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(\xi+1/2)\{\sqcap(x-\xi) - \sqcap(-\xi)\}\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(\xi+1/2)\sqcap(x-\xi)\,d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(\xi+1/2)\sqcap(-\xi)\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{x} \sqcap(\xi+1/2)\,d\xi - \int_{-\infty}^{0} \sqcap(\xi+1/2)\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{x} \sqcap(\xi+1/2)\,d\xi - 1 \\
&= 0 - 1 = -1 \quad \text{para } x < -1 \\
&= 1 + x - 1 = x \quad \text{para } -1 < x < 0 \\
&= 1 - 1 = 0 \quad \text{para } x > 0
\end{aligned}$$

Cuyo gráfico es



6. Encuentre la siguiente convolución bi-dimensional $\sqcap(x)\delta(y-1) * \sqcap(x,y)$

Resultado: Pasando a Fourier se tiene

$$\sqcap(x)\delta(y-1) \longrightarrow \text{sinc}\,(u)e^{-i2\pi v}$$

$$\sqcap(x,y) \longrightarrow \text{sinc}\,(u)\,\text{sinc}\,(v)$$

y

$$\sqcap(x)\delta(y-1) * \sqcap(x,y) \longrightarrow \text{sinc}\,(u)e^{-i2\pi v}\,\text{sinc}\,(u)\,\text{sinc}\,(v) = \text{sinc}^2(u)e^{-i2\pi v}\,\text{sinc}\,(v)$$

Como es separable, las inversa para cada dimensión son

$$\wedge(x) \longrightarrow \text{sinc}^2(u)$$

$$\sqcap(y-1) \longrightarrow e^{-i2\pi v}\,\text{sinc}\,(v)$$

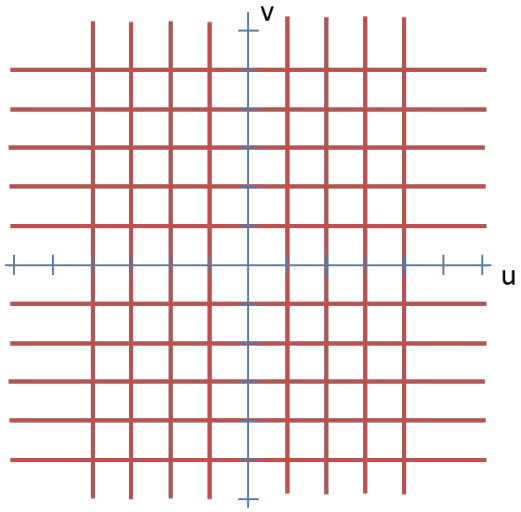
Es decir la convolución es $\wedge(x)\sqcap(y-1)$.

7. En el plano u-v indique el lugar donde $F(u,v)$ se hace cero, si $F(u,v)$ es la transformada de Fourier bi-dimensional de $f(x,y) = \sqcap(x-1/2, y-1/2)$.

Resultado: Usando la propiedad del desplazamiento se puede calcular la transformada de Fourier:

$$\sqcap(x-1/2, y-1/2) \longrightarrow e^{-i\pi(u+v)}\,\mathrm{sinc}\,(u,v)$$

Esta función se hará cero donde $\mathrm{sinc}\,(u,v)$ sea cero, es decir en



8. Si

$$f(x) = \frac{1}{i\pi x} \wedge (x),$$

evalúe $F(u)$, su transformada de Fourier, en $u \to -\infty$, en $u = 0$ y en $u \to \infty$.

Resultado: Sabemos que

$$\frac{1}{i\pi x} \longrightarrow \mathrm{sgn}(-u)$$
$$\wedge(x) \longrightarrow \mathrm{sinc}^2(u)$$

Por lo que

$$F(u) = \mathrm{sgn}(-u) * \mathrm{sinc}^2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\xi - u)\,\mathrm{sinc}^2\xi\, d\xi$$

$$F(u) = \int_{u}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\xi\, d\xi - \int_{-\infty}^{u} \mathrm{sinc}^2\xi\, d\xi$$

De donde, si $u \to -\infty$,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\xi\, d\xi = 1$$

Si $u = 0$,

$$F(u) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\xi\, d\xi - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{sinc}^2\xi\, d\xi = 0$$

Y si $u \to \infty$,

$$F(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\xi\, d\xi = -1$$

9. ¿Para qué valores de $\sigma \in \mathbb{R}$ converge la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^{\sigma}}\, dt?$$

Resultado: Considernado que $t > 0$, se tiene

$$\frac{1}{1+t^\sigma} < \frac{1}{t^\sigma}$$

es decir,

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^\sigma}\,dt < \int_0^\infty \frac{1}{t^\sigma}\,dt \approx \int_\epsilon^\infty t^{-\sigma}\,dt = \frac{1}{1-\sigma}t^{1-\sigma}\Big|_\epsilon^\infty$$

que solo converge para $\sigma > 1$.

10. Se tiene un sistema de n dimensiones cuya función de transferencia es la matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathbf{H}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Encuentre la ecuación diferencial que describe al sistema.

Resultado: La salida del sistema será

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{F}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}(s)$$

es decir,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{G}(s) = \mathbf{F}(s)$$

de donde

$$s\mathbf{G}(s) - \mathbf{A}\mathbf{G}(s) = \mathbf{F}(s)$$

que en el tiempo es

$$\mathbf{g}'(t) - \mathbf{A}\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t)$$

11. Resuelva la siguiente ecuación diferencial empleando la transformada de Laplace unilateral

$$y''(t) + 4y'(t) = 16t \quad \text{con} \quad y(1/2) = 0, \quad y'(1/2) = 1$$

Resultado: Para resolver este problema es necesario desplazar las funciones de manera que las condiciones iniciales queden en $t = 0$. Para eso definimos $p = t - 1/2$, con lo que el sistema queda

$$y''(p+1/2) + 4y'(p+1/2) = 16p + 8 \quad \text{con} \quad y(1/2) = 0, \quad y'(1/2) = 1$$

y si definimos la función $u(p) = y(p + 1/2)$ tenemos

$$u''(p) + 4u'(p) = 16p + 8 \quad \text{con} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

Esta ecuación se puede resolver en forma estándar en el dominio de Laplace

$$s^2U(s) + 4sU(s) - 1 = \frac{16}{s^2} + \frac{8}{s}$$

$$(s^2 + 4s)U(s) = \frac{16}{s^2} + \frac{8}{s} + 1 = \frac{16 + 8s + s^2}{s^2} = \frac{(s+4)^2}{s^2}$$

$$U(s) = \frac{s+4}{s^3} = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^3}$$

cuya inversa es

$$u(p) = (p + 2p^2)\sqcap(p)$$

Ahora, reemplazando $u(p)$ con $y(t - 1/2)$

$$y(t) = (t - 1/2 + 2(t - 1/2)^2)\sqcap(t - 1/2)$$

12. Sea $F[k]$ la DFT de largo N de $f[n]$. Encuentre la DFT de $f[n] + f[n - N/2]$ y de $(-1)^n f[n]$ en función de $F[k]$.

Resultado: Usamos la propiedad del desplazamiento

$$f[n-a] \longrightarrow e^{-i2\pi ak/N} F[k]$$

es decir

$$f[n - N/2] \longrightarrow e^{-i\pi k} F[k] = (-1)^k F[k]$$
$$f[n] + f[n - N/2] \longrightarrow (1 + (-1)^k) F[k]$$

La misma propiedad nos sirve para el dominio de Fourier

$$e^{i2\pi an/N} f[n] \longrightarrow F[n - a]$$

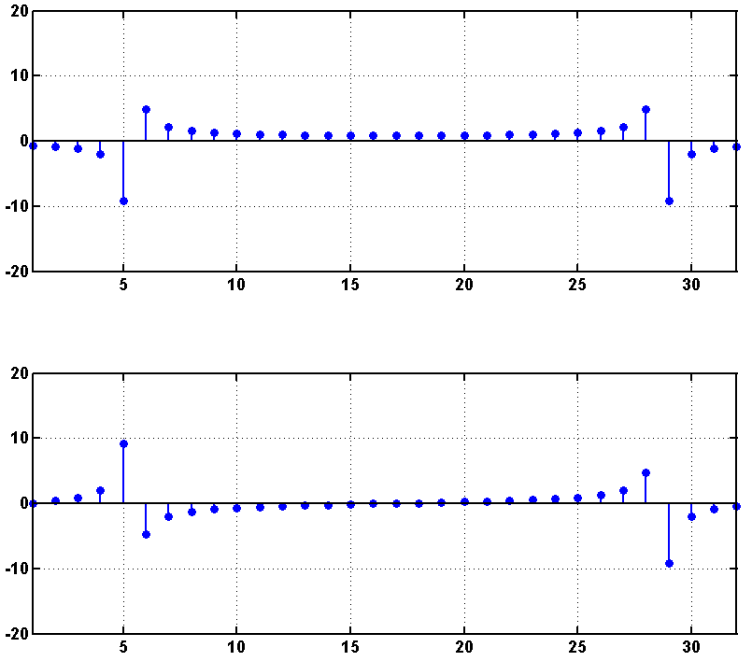
Y si $a = N/2$ tenemos

$$e^{i\pi n} f[n] = (-1)^n f[n] \longrightarrow F[n - N/2]$$

13. Se tiene un registro de audio correspondiente a una sinusoide real. El registro tiene 32 muestras, tomadas cada 100 us. Los gráficos de la figura fueron obtenidos con los siguientes comandos Matlab, donde F son los datos en el tiempo.

```
FF = fft(F);
subplot(2,1,1);
stem(real(FF)); axis([1 32 -20 20]);grid
subplot(2,1,2);
stem(imag(FF)); axis([1 32 -20 20]);grid
```

Encuentre lo más aproximado que pueda la frecuencia de la sinusoide.



Resultado: Comenzamos por encontrar el periodo de muestreo en la frecuencia. Tenemos $N = 32$ y $T = 0.1$ ms, por lo que de $NUT = 1$ sabemos que $U = 1/3.2 \approx 0.31$ kHz. El primer gráfico contiene la parte real y el segundo la imaginaria. Mentalmente podemos imaginarnos la magnitud. Es claro que habrá un pico en la muestra 5. También se puede apreciar que hubo derrame porque parte de la energía se fue a la muestra 6, por lo que podemos suponer que la frecuencia de la sinuosoide estará entre esas dos muestras. La muestra 5 corresponde a $k = 4$ (nótese que el primer índice de Matlab es 1), es decir corresponde a la frecuencia $4U \approx 1.24$ kHz. La muestra 6 corresponde a $5U \approx 1.55$ kHz. La frecuencia de la sinusoide estará entre estos dos valores, un poco más cercano a 1.24 kHz. Digamos 1.3 kHz.

14. Grafique la señal $f[n]$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, cuya transformada Z es

$$F(z) = \frac{1}{1 + 2iz^{-1}} \qquad |z| > 2$$

Resultado: Sustituyendo a por $-2i$ en

$$a^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{con } |z| > |a|$$

tenemos

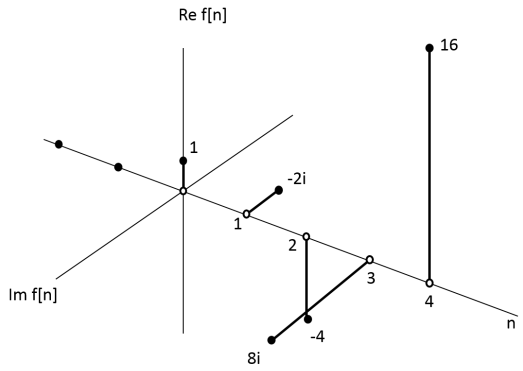
$$(-2i)^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1 + 2iz^{-1}} \quad \text{con } |z| > |2|$$

es decir

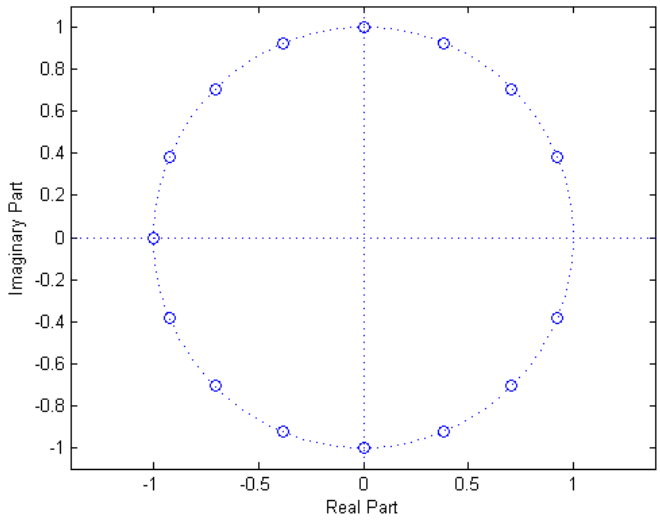
$$f[n] = (-2i)^n \sqcap[n]$$

que evaluada en el rango pedido es

$$f[n] = (..., \underline{1},\ -2i,\ -4,\ 8i,\ 16, ...)$$



15. Encuentre una función de transferencia en el dominio Z cuyo diagrama de polos y ceros sea el siguiente



Resultado: Los ceros son 15 y están distribuidos en el círculo unitario:

$$c_k = e^{i2\pi k/16} \quad \text{con } k = 1..15$$

y son las 16 raíces de la unidad, menos $z = 1$, por lo que una manera fácil de encontrar una función de transferencia es

$$H(z) = \frac{z^{16} - 1}{z - 1}$$