Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 12

Fecha de entrega: 29 de mayo de 2022

---

1. Defina matemáticamente la DFT y su inversa.

   La **Transformada de Fourier discreta** se define como:

   $$\tilde{F}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi kn/N}$$

   Y su inversa:

   $$\tilde{f}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k] e^{i2\pi kn/N}$$

2. ¿Para que tipo de funciones aplica la DFT?

   La DFT es para señales que son:

   - Periódicas y discretas en el tiempo.
   - Periódicas y discretas en la frecuencia.

3. Calcule la DFT de las siguiente función discreta, asuma que la primera muestra está en el origen:

   $$[0\ 1\ 0\ 1]$$

   Para resolver esto se establece $N = 4$ del enunciado, según el período de la secuencia. Luego, aplicando la formula:

   $$DFT\{f[n] = [0\ 1\ 0\ 1]\}[k] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} f[n] e^{-i2\pi kn/4}$$

   Para resolver consideramos:

   $$f[0] = 0 \qquad f[1] = 1 \qquad f[2] = 0 \qquad f[3] = 1$$

Entonces al expandir la sumatoria tendremos:

$$DFT\{f[n]\}[k] = \frac{1}{4}\left(0 \cdot e^{-i2\pi k \cdot 0/4} + 1 \cdot e^{-i2\pi k/4} + 0 \cdot e^{-i2\pi k2/4} + 1 \cdot e^{-i2\pi k3/4}\right)$$

Al reducir términos se obtiene:

$$DFT\{f[n]\}[k] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi k/2} + e^{-i\pi k3/2}\right)$$

Reemplazamos para 4 valores de k (dado que la DFT en este caso es periódica de período 4):

$$DFT\{f[n]\}[0] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi 0/2} + e^{-i\pi 03/2}\right) = 0.5$$

$$DFT\{f[n]\}[1] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi/2} + e^{-i\pi 3/2}\right) = 0$$

$$DFT\{f[n]\}[2] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi 2/2} + e^{-i\pi 32/2}\right) = -0.5$$

$$DFT\{f[n]\}[3] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi 3/2} + e^{-i\pi 3\cdot 3/2}\right) = 0$$

Finalmente, tendremos que:

$$DFT\{f[n]\}[k] = [0.5 \quad 0 \quad -0.5 \quad 0]$$

4. Demuestre que la DFT cumple con la misma propiedad del desplazamiento que la FT.

Consideremos la DFT de una señal desplazada en a:

$$DFT\{f[n-a]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[n-a]e^{-i2\pi kn/N}$$

Haciendo un cambio de variable $J = n - a$ tendremos que:

$$DFT\{f[n-a]\} = \frac{1}{N}\sum_{J=0}^{N-1} f[J]e^{-i2\pi kJ/N}e^{-i2\pi ka/N}$$

El término $e^{-i2\pi ka/N}$ puede salir de la sumatoria porque es constante respecto a J, luego se tiene que:

$$DFT\{f[n-a]\} = e^{-i2\pi ka/N}\frac{1}{N}\sum_{J=0}^{N-1} f[J]e^{-i2\pi kJ/N}$$

Observemos que el término de la derecha es (cambiando J por n porque no importa como se llame la variable) $DFT\{f[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i2\pi kn/N}$. Luego lo que se tiene es:

$$DFT\{f[n-a]\} = e^{-i2\pi ka/N}DFT\{f[n]\}$$

Esta es análoga a la protpiedad del desplazamiento de la transformada de Fourier continua.

5. Explique la relación que existe entre el número de muestras N, el período de muestreo en el tiempo T y el período de muestreo en la frecuencia U.

Una función discreta puede ser periódica sólo si el período es un múltiplo entero del intervalo de muestreo. Llamemos N a este múltiplo. En el espacio, el intervalo de muestreo es T y el periodo es 1/U (el inverso del intervalo de muestreo en la frecuencia), se tiene que NT = 1/U[1]. O, en la frecuencia, el intervalo de muestreo es U y el periodo es 1/T (el inverso del intervalo de muestreo en el espacio), se tiene que NU = 1/T. Es decir:

$$\boxed{\mathbf{NUT = 1}}$$

6. A partir de la relación antes explicada, determine U para $f(t) = sin(\pi t)$ con un número de muestras $N = 32$.

La DFT es una transformada que asume periodicidad tanto en su entrada como en su salida. De esta manera, hay que tener mucho cuidado a la hora de escoger cómo se muestrea la señal de entrada. Esto último viene dado porque la DFT replicará la función discreta ($f[n] = f(nT)$) para obtener una función periódica y, si las muestras no corresponden a un periodo exacto de la función continua, la función a transformar que interpretará la DFT será distinta a la que realmente es. Así, se tiene que el periodo de muestreo en el tiempo o espacio T será el periodo de la función T_f de entrada dividido por el número de muestras N o, lo que es lo mismo, $T = \frac{T_f}{N}$. Por otro lado, tomar la DFT no es más que aplicar DFFT a una señal muestreada en el espacio o tiempo. Así, por definición, se tiene que el periodo de muestreo en frecuencia U es igual a la

[1]Usted debe recordar que NUT = 1 para el proyecto o cualquier implementación computacional que incluya DFT - FFT

frecuencia de la señal a transformar. En otras palabras, $U = \frac{1}{T_f}$. Al reemplazar T_f por NT en esta última expresión, gracias a la primera igualdad, se obtiene que $U = \frac{1}{NT}$. Reordenado se tiene, finalmente, que $NUT = 1$.

La forma más directa de resolver este problema es determinar la frecuencia de $f(t)$ que en este caso es de 0.5 Hz ($w = 2\pi f = pi$). Esta frecuencia es U. Además, se puede hacer lo mismo pero con la fórmula $NUT = 1$ donde $N = 32$ y $T = \frac{2}{N}$. Al reemplazar se tiene que $U = \frac{1}{NT} = \frac{1}{32 \cdot 0.0625} = 0.5\ Hz$.