Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 1–2011 — Vicente Parot

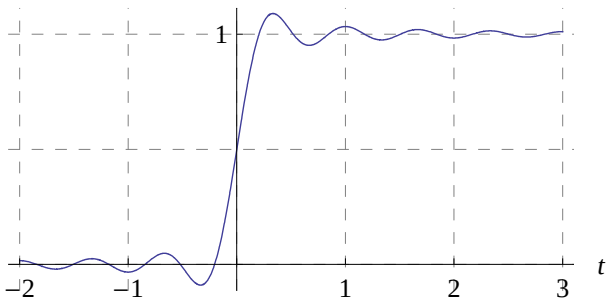
Documento #10

Interrogación 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] **Filtro anti–aliasión.** Para evitar aliasión al muestrear una señal con intervalo de muestreo T, se le aplica antes un filtro pasabajos ideal, que preserve toda la información de las frecuencias a registrar en el muestreo, pero que elimine las frecuencias superiores. Considere una señal a muestrear, el escalón (que tiene ancho de banda ilimitado). Luego de aplicarle el filtro anti–aliasión, queda como aparece en el siguiente gráfico, donde el eje horizontal indica el tiempo medido en segundos.



   a) ¿Cual es la frecuencia de corte del filtro pasabajos aplicado?

   b) ¿Cuánto vale T, el intervalo de muestreo para el cual se ha diseñado el filtro?

   Resultado: Se sabe que aplicar el filtro anti–aliasión es equivalente a convolucionar con una función sinc. Como convolucionar con escalón es también equivalente a integrar, el gráfico muestra la integral del sinc en cuestión. A partir del gráfico, se puede ver que los cruces por cero del sinc, coincidentes con puntos de pendiente cero en su integral, ocurren en $t = \pm k/3$, con $k = 1 \ldots \infty$. Además, la integral del sinc de filtrado tiende a 1, por lo que éste y su transformada de Fourier son

$$3\,\mathrm{sinc}\,(3t) \longrightarrow \sqcap(u/3)$$

   Esto indica que el filtro pasabajos tiene frecuencia de corte $u_c = 3/2$ hertz, y que el intervalo de muestreo de diseño es $T = 1/3$ segundos.

2. [4 ptos] **DFT matricial.** Se tiene el vector G de N elementos, resultado de calcular la DFT de g, que es la acumulación de f: $g[n] = \sum_{p=0}^{n} f[p]$. ¿Qué producto matricial permite calcular F (la DFT de f) a partir de G?

   Resultado: Considere la notación matricial para resolver este ejercicio, con $\mathcal{W}$ la matriz DFT. Sea $\mathcal{A}$ la matriz que representa la operación de acumulación de un vector al ser multiplicada. Ejemplo para N=4,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Así se puede relacionar matricialmente G con f o F,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f &= F \\ f &= \mathcal{W}^{-1}F \\ \mathcal{A}f &= \mathcal{A}\mathcal{W}^{-1}F \\ \mathcal{W}\mathcal{A}f = G &= \mathcal{W}\mathcal{A}\mathcal{W}^{-1}F \end{aligned}$$

   Entonces usando $\mathcal{D} = \mathcal{A}^{-1}$, que representa la operación inversa de la acumulación, es una matriz que calcula la diferencia entre cada elemento y el anterior, ejemplo para N=4,

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   F se obtiene al multiplicar G con $\mathcal{M} = \mathcal{W}\mathcal{D}\mathcal{W}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}\mathcal{A}\mathcal{W}^{-1}F &= G \\ \mathcal{W}\mathcal{D}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{W}\mathcal{A}\mathcal{W}^{-1}F &= \mathcal{W}\mathcal{D}\mathcal{W}^{-1}G \\ F &= \mathcal{M}G \end{aligned}$$

3. [4 ptos] **Z inversa.** Calcule la transformada Z inversa de $F(z)$:

$$F(z) = \ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right), \quad |z| > 1$$

   Resultado: Se puede resolver usando la propiedad de derivación en z,

$$\begin{aligned} f[n] &\longrightarrow \ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = -\ln(1-z^{-1}) \\ nf[n] &\longrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(-\ln(1-z^{-1})\right) \\ nf[n] &\longrightarrow z\frac{-1\cdot -z^{-2}}{1-z^{-1}} \\ nf[n] &\longrightarrow z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqcap[n] &\longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1 \\
\sqcap[n-1] &\longrightarrow z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
nf[n] &= \sqcap[n-1] \\
f[n] &= \frac{1}{n}\sqcap[n-1]
\end{aligned}$$

4. [6 ptos] **Z.** Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = \cos(\theta n)\sqcap[n]$$

donde θ es una constante real.

   a) Calcule su función de transferencia.

   b) ¿Qué condición debe cumplir θ para que la ecuación de diferencias que describe al sistema sólo tenga coeficientes reales?

Resultado: Expandiendo el coseno como suma de exponenciales, $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, se puede usar la propiedad de escalamiento en frecuencia para calcular la función de transferencia,

$$\begin{aligned}
h[n] &= \cos(\theta n)\sqcap[n] \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}\right)^n\sqcap[n] + \frac{1}{2}\left(e^{-i\theta}\right)^n\sqcap[n] \\
\sqcap[n] &\longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1 \\
{z_0}^n\sqcap[n] &\longrightarrow \frac{1}{1-z_0z^{-1}}, \quad |{z_0}^{-1}z|>1 \\
h[n] &\longrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{i\theta}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-i\theta}z^{-1}}, \quad |z|>1 \\
h[n] &\longrightarrow \frac{1-\cos(\theta)z^{-1}}{1-2\cos(\theta)z^{-1}+z^{-2}}, \quad |z|>1
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $h^*[n] \longrightarrow H^*(z^*)$, si $h[n]$ tiene valores reales, $h[n] = h^*[n]$ y entonces

$$\begin{aligned}
H(z) &= H^*(z^*) \\
\frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{P^*(z^*)}{Q^*(z^*)} \\
\frac{\sum p_j z^j}{\sum q_j z^j} &= \frac{\left(\sum p_j z^{*j}\right)^*}{\left(\sum q_j z^{*j}\right)^*} = \frac{\sum p_j^* z^j}{\sum q_j^* z^j}
\end{aligned}$$

Como $h[n]$ es real, entonces los coeficientes de $H(z)$ fraccion polinomial también lo son, y por consiguiente también los coeficientes de la ecuación de diferencias. Esto también se ve en la función de transferencia calculada en la parte (a), donde los coeficientes son reales. Los coeficientes de la ecuación de diferencias son reales para todo valor de θ.

5. [4 ptos] **DFT.** Demuestre el teorema de potencia de la DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]\tilde{g}^*[n] = N \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]\tilde{G}^*[k]$$

Resultado: Todas las sumatorias son desde 0 hasta $N-1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]\tilde{g}^*[n] &= N \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]\tilde{G}^*[k] \\
&= N \sum_{k} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi nk/N} \right) \tilde{G}^*[k] \\
&= N \sum_{k} \frac{1}{N} \sum_{n} \tilde{f}[n]\tilde{G}^*[k] e^{-i2\pi nk/N} \\
&= N \sum_{n} \frac{1}{N} \sum_{k} \tilde{f}[n]\tilde{G}^*[k] e^{-i2\pi nk/N} \\
&= N \sum_{n} \tilde{f}[n] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{G}^*[k] e^{-i2\pi nk/N} \\
\tilde{G}^*[n] &\longrightarrow \frac{1}{N}\tilde{g}^*[k] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]\tilde{g}^*[n]
\end{aligned}$$

6. [6 ptos] **Estabilidad.** Un sistema causal está descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2]$$

Demuestre si el sistema es estable o no.

Resultado: El sistema tiene función de transferencia

$$\frac{2 - 2z^{-1}}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

que tiene polos en $z^{-1} = 1 \pm i$. Como la región de convergencia está hacia afuera de los polos por ser causal el sistema, en este caso $|z| > 1/\sqrt{2}$ y el sistema es estable porque contiene al círculo unitario.