# Interrogación 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (10 pts.) **Series de Fourier.** Considere la función periódica de período $2\pi$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ \pi, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

   (a) (8 pts.) Exprese $f(x)$ como una serie de Fourier.

   (b) (2 pts.) Escoja un valor adecuado de $x$ para mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

**Solución:**

El período de la señal es $X_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$, lo que implica que $\omega_0 = 1 \rightarrow$ **1 pts.**.

(a) Calculemos primero $a_0$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xdx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{2\pi}\left[x\right]\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi - \pi\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{3\pi}{4}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Ahora calculamos $a_k$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos(kx)dx$$

Integrando por partes,

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[x\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\right]\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}dx\right] + \frac{\pi}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\right]\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left(\pi\operatorname{sen}(k\pi) - 0\right) - \left[\frac{-\cos(kx)}{k^2}\right]\Big|_0^{\pi}\right] + \frac{1}{k}\left(\operatorname{sen}(k2\pi) - \operatorname{sen}(k\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}(0-0) + \left(\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos(0)}{k^2}\right)\right] + \frac{1}{k}(0-0) = \frac{1}{k^2\pi}\cos(k\pi - 1)$$

Es decir,

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k^2\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} -\frac{2}{k^2\pi}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Finalmente calculamos $b_k$:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}\,(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi\,\text{sen}\,(kx)dx$$

Integrando por partes,

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[x\left(-\frac{\cos(kx)}{k}\right)\right]\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kx)}{k}dx\right] + \frac{\pi}{\pi}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left(-\pi\cos(k\pi) + 0\right) + \left[\frac{\text{sen}\,(kx)}{k^2}\right]\Big|_0^{\pi}\right] - \frac{1}{k}(\cos(k2\pi) - \cos(k\pi))$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi(-1)^k}{k} + \left(\frac{\text{sen}\,(k\pi)}{k^2} - \frac{\text{sen}\,(0)}{k^2}\right)\right] - \frac{1}{k}(1-(-1)^k) = -\frac{1}{k}(-1)^k + 0 - \frac{1}{k}(1-(-1)^k))$$

Es decir,

$$\boxed{b_k = -\frac{1}{k}(-1)^k - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}(-1)^k = -\frac{1}{k}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Entonces $f(x)$ puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,(kx)}{k}, & k \text{ par} \\ \frac{3\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{k^2\pi}\cos(kx) + \frac{\text{sen}\,(kx)}{k}\right], & k \text{ impar} \end{cases}$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}&\left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \ldots\right] \\ &- \left[\text{sen}\,(x) + \frac{1}{2}\text{sen}\,(2x) + \frac{1}{3}\text{sen}\,(3x) + \ldots\right] \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

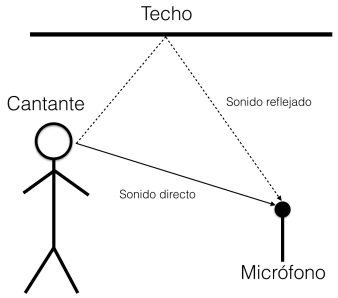
(b) Para satisfacer esta relación necesitamos eliminar los términos $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$, lo que implica hacer cero los cosenos. Por lo tanto, escogemos $x = \frac{\pi}{2}$ → **1 pts.**, resultando

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[0+0+0+\ldots\right] - \left[(1)+\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{5}(1)+\ldots\right]$$

Es decir,

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

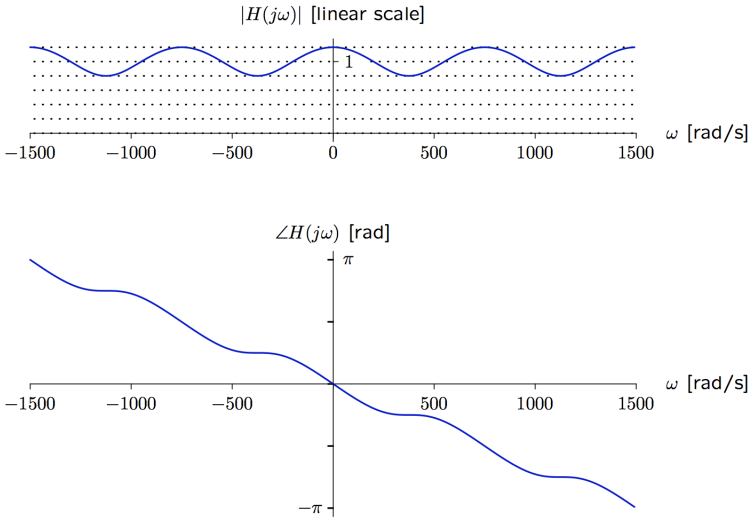
2. (10 pts.) **Ecos**[1]**.** Suponga que ud. quiere grabarse cantando para participar en el Festival de Viña con un micrófono a una distancia temporal $T_1$, es decir éste es el tiempo en que el sonido tarda en llegar desde su voz al micrófono (sonido directo). Pero el sonido también rebota en el techo y llega al micrófono con un retardo $T_2$ (sonido reflejado), tal como lo muestra la siguiente figura.




El sistema de grabación se puede representar como un sistema LTI donde su voz es la entrada y la señal grabada por el micrófono la salida. Asuma que la respuesta al impulso de este sistema es de la forma

$$h(t) = \delta(t - T_1) + \alpha\delta(t - T_2)$$

donde $\alpha$ es un factor de atenuación de la amplitud del rebote proveniente del techo. Asuma que la amplitud del sonido directo es 1. En los gráficos siguientes se muestran la magnitud y la fase de la respuesta de frecuencia del sistema, para $|\omega| < 1500$ rad/s.




Estime los valores de $T_1$, $T_2$ y $\alpha$.

[1]Dennis Freeman, 6.003 Signals and Systems, Fall 2011. (MIT OpenCourseWare: Massachusetts Institute of Technology), `http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-003-signals-and-systems-fall-2011/` (Accesado Oct. 10 2011). Licencia: Creative commons BY-NC-SA

**Solución:**

La respuesta de frecuencia el sistema es la Transformada de Fourier de la respuesta al impulso. Es decir,

$$H(\omega) = e^{-i\omega T_1} + \alpha e^{-i\omega T_2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$H(\omega) = \cos(\omega T_1) - i\,\text{sen}\,(\omega T_1) + \alpha\cos(\omega T_2) - i\alpha\,\text{sen}\,(\omega T_2)$$

Agrupando parte real e imaginaria,

$$H(\omega) = \cos(\omega T_1) + \alpha\cos(\omega T_2) - i(\,\text{sen}\,(\omega T_1) + \alpha\,\text{sen}\,(\omega T_2))$$

El módulo es

$$|H(\omega)| = \sqrt{\begin{array}{l}\cos^2(\omega T_1) + 2\alpha\cos(\omega T_1)\cos(\omega T_2) + \alpha^2\cos^2(\omega T_2) + \\ \text{sen}^{\,2}(\omega T_1) + 2\alpha\,\text{sen}\,(\omega T_1)\,\text{sen}\,(\omega T_2) + \alpha^2\,\text{sen}^{\,2}(\omega T_2)\end{array}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega T_1)\cos(\omega T_2) + 2\alpha\,\text{sen}\,(\omega T_1)\,\text{sen}\,(\omega T_2)}$$

Utilizando prostaféresis

$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + \alpha^2 + \alpha\cos(\omega(T_2 - T_1)) + \alpha\cos(\omega(T_2 + T_1)) + \alpha\cos(\omega(T_2 - T_1)) - \alpha\cos(\omega(T_2 + T_1))}$$

Finalmente,

$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega(T_2 - T_1))} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Podemos observar que la magnitud tiene una oscilación de período $\frac{2\pi}{T_2 - T_1}$ en $\omega \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$.
Además, esta oscilación alcanza un máximo en $1 + \alpha$ y un mínimo en $1 - \alpha \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$.
Del gráfico de la magnitud podemos estimar

$$\boxed{\alpha \approx 0.2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

El período de oscilación es aproximadamente 750 rad/s. Es decir

$$\frac{2\pi}{T_2 - T_1} \approx 750 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para calcular la fase, en el gráfico se observa que ésta es prácticamente una línea recta con una pendiente principal y una pequeña oscilación en torno a ésta. Es razonable suponer que la pendiente depende del primer eco y la oscilación del segundo que debe tener bastante

menor amplitud, es decir $\alpha \ll 1$, por lo tanto la fase estará dominada por el primer término de la respuesta de frecuencia, es decir podemos aproximar la fase a

$$\angle H(\omega) \approx -\omega T_1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Esto nos permite estimar $T_1$ de acuerdo al gráfico de la fase

$$\boxed{T_1 \approx \frac{2\pi}{1500}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

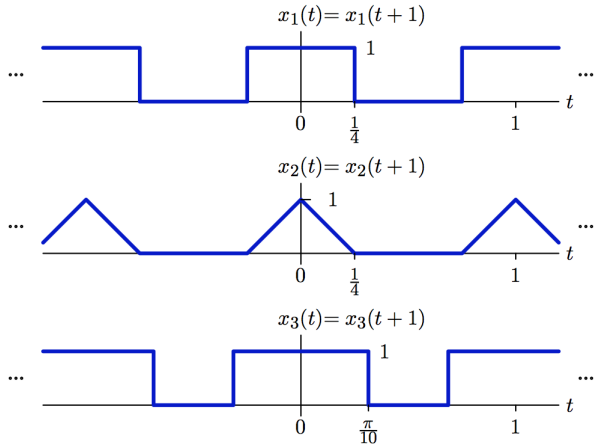
Podemos ahora encontrar $T_2$

$$T_2 \approx \frac{2\pi}{750} + T_1 = \frac{4\pi}{1500} + \frac{\pi}{1500}$$

Es decir,

$$\boxed{T_2 \approx \frac{5\pi}{1500} = \frac{\pi}{300}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

3. (12 pts.) **Señales periódicas**[2]**.** Considere las siguientes señales periódicas de período 1.




Utilizando información del dominio de Fourier, indique en la tabla siguiente si los sistemas correspondientes pueden ser LTI o no. Justifique sus respuestas.

| Sistema | ¿LTI? | Justificación |
|---|---|---|
| $x_1(t) \to x_2(t)$ | | |
| $x_1(t) \to x_3(t)$ | | |
| $x_2(t) \to x_1(t)$ | | |
| $x_2(t) \to x_3(t)$ | | |
| $x_3(t) \to x_1(t)$ | | |
| $x_3(t) \to x_2(t)$ | | |

**Solución:**

[2]Dennis Freeman, 6.003 Signals and Systems, Fall 2011. (MIT OpenCourseWare: Massachusetts Institute of Technology), `http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-003-signals-and-systems-fall-2011/` (Accesado Oct. 10 2011). Licencia: Creative commons BY-NC-SA

El primer paso a realizar es calcular los coeficientes de Fourier $C_k^i$ para las tres señales.
Para $x_1(t)$,

$$C_k^1 = \frac{1}{1}\int_0^1 f(t)e^{-i2\pi kt}dt = \int_{-1/4}^{1/4} e^{-i2\pi kt}dt = \frac{1}{-i2\pi k}\left[e^{-2\pi kt}\right]\Big|_{-1/4}^{1/4} = \frac{1}{-i2\pi k}[e^{-i\pi k/2} - e^{i\pi k/2}]$$

$$= \frac{1}{-i2\pi k}[-2i\,\mathrm{sen}\,(\pi k/2)] = \frac{\mathrm{sen}\,(\pi k/2)}{\pi k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{\pi k}, & |k| = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{-1}{\pi k}, & |k| = 3, 7, 11, \ldots \\ 0, & |k| = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Para $x_2(t)$,

$$C_k^2 = \frac{1}{1}\int_0^1 f(t)e^{-i2\pi kt}dt = \int_{-1/4}^{0}(1+4t)e^{-i2\pi kt}dt + \int_0^{1/4}(1-4t)e^{-i2\pi kt}dt$$

$$= \int_{-1/4}^{0} e^{-i2\pi kt}dt + 4\int_{-1/4}^{0} te^{-i2\pi kt}dt + \int_0^{1/4} e^{-i2\pi kt}dt - 4\int_0^{1/4} te^{-i2\pi kt}dt$$

Usando integración por partes,

$$= \frac{-1}{i2\pi k}e^{-i2\pi kt}\Big|_{-1/4}^{0} + 4\left(t\frac{e^{-i2\pi kt}}{-i2\pi k}\Big|_{-1/4}^{0} - \frac{1}{i2\pi k}\int_{-1/4}^{0} 1e^{-i2\pi kt}dt\right)$$

$$+\frac{-1}{i2\pi k}e^{-i2\pi kt}\Big|_{0}^{1/4} - 4\left(t\frac{e^{-i2\pi kt}}{-i2\pi k}\Big|_{0}^{1/4} - \frac{1}{i2\pi k}\int_{0}^{1/4} 1e^{-i2\pi kt}dt\right)$$

$$= \frac{-1}{i2\pi k} - \frac{-1}{i2\pi k}e^{i\pi k/2} + 4\left(0 - -\frac{1}{4}\frac{e^{i\pi k/2}}{-i2\pi k} - \frac{1}{i^2 4\pi^2 k^2}[e^{-i2\pi kt}]\Big|_{-1/4}^{0}\right)$$

$$+\frac{-1}{i2\pi k}e^{-i\pi k/2} - \frac{-1}{i2\pi k} - 4\left(\frac{1}{4}\frac{e^{-i\pi k/2}}{-i2\pi k} - 0 - \frac{1}{i^2 4\pi^2 k^2}[e^{-i2\pi kt}]\Big|_{0}^{1/4}\right)$$

$$= -\frac{-1}{i2\pi k}e^{i\pi k/2} + 4\left(-\frac{1}{4}\frac{e^{i\pi k/2}}{i2\pi k} - \frac{1}{i^2 4\pi^2 k^2}(1 - e^{i\pi k/2})\right)$$

$$+\frac{-1}{i2\pi k}e^{-i\pi k/2} - 4\left(-\frac{1}{4}\frac{e^{-i\pi k/2}}{i2\pi k} - \frac{1}{i^2 4\pi^2 k^2}(e^{-i\pi k/2} - 1)\right)$$

$$= \frac{e^{i\pi k/2}}{i2\pi k} - \frac{e^{i\pi k/2}}{i2\pi k} + \frac{1}{\pi^2 k^2}(1 - e^{i\pi k/2}) - \frac{e^{-i\pi k/2}}{i2\pi k} + \frac{e^{-i\pi k/2}}{i2\pi k} - \frac{1}{\pi^2 k^2}(e^{-i\pi k/2} - 1)$$

$$= \frac{1}{\pi^2 k^2}(1 - e^{i\pi k/2}) + \frac{1}{\pi^2 k^2}(1 - e^{-i\pi k/2}) = \frac{2}{\pi^2 k^2} - (\frac{e^{i\pi k/2}}{\pi^2 k^2} + \frac{e^{-i\pi k/2}}{\pi^2 k^2})$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2} - (\frac{e^{i2\pi k/4}}{\pi^2 k^2} + \frac{e^{-i2\pi k/4}}{\pi^2 k^2}) = \frac{2}{\pi^2 k^2} - \frac{2\cos(\pi k/4)}{\pi^2 k^2} = \frac{2}{\pi^2 k^2}(1 - \cos(2\pi k/4))$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2}(1 - \cos^2(\pi k/4) + \operatorname{sen}^2(\pi k/4)) = \frac{4\operatorname{sen}^2(\pi k/4)}{\pi^2 k^2} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 0 \\ \frac{2}{\pi^2 k^2}, & |k| = 1, 3, 5, \ldots \\ \frac{4}{\pi^2 k^2}, & |k| = 2, 6, 10, \ldots \\ 0, & |k| = 4, 8, 12, \ldots \end{cases} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Nota: Este resultado se podría haber obtenido mucho más facilmente mediante la convolución de dos $\sqcap$.

Para $x_3(t)$,

$$C_k^3 = \frac{1}{1}\int_0^1 f(t)e^{-i2\pi kt}dt = \int_{-\pi/10}^{\pi/10} e^{-i2\pi kt}dt = \frac{1}{-i2\pi k}\left[e^{-2\pi kt}\right]\Big|_{-\pi/10}^{\pi/10} = \frac{1}{-i2\pi k}[e^{-i\pi^2 k/5} - e^{i\pi^2 k/5}]$$

$$= \frac{1}{-i2\pi k}[-2i\operatorname{sen}(\pi^2 k/5)] = \frac{\operatorname{sen}(\pi^2 k/5)}{\pi k} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Ahora estamos en condiciones de llenar la tabla:

| Sistema | ¿LTI? | Justificación |
|---|---|---|
| $x_1(t) \rightarrow x_2(t)$ | NO | Los coeficientes $C_k^1$ son cero en $k = 2, 6, 10, \ldots$ pero no son cero en $C_k^2$. $\rightarrow$ **1 pts.** |
| $x_1(t) \rightarrow x_3(t)$ | NO | Los coeficientes $C_k^1$ son cero en $k = 2, 6, 10, \ldots$ pero no son cero en $C_k^3$. $\rightarrow$ **1 pts.** |
| $x_2(t) \rightarrow x_1(t)$ | SI | Todos los coeficientes que no son cero en $C_k^1$ están presentes en $C_k^2$. $\rightarrow$ **1 pts.** |
| $x_2(t) \rightarrow x_3(t)$ | NO | Los coeficientes $C_k^2$ son cero en $k = 4, 8, 12, \ldots$ pero no son cero en $C_k^3$. $\rightarrow$ **1 pts.** |
| $x_3(t) \rightarrow x_1(t)$ | SI | Todos los coeficientes que no son cero en $C_k^1$ están presentes en $C_k^3$. $\rightarrow$ **1 pts.** |
| $x_3(t) \rightarrow x_2(t)$ | SI | Todos los coeficientes que no son cero en $C_k^2$ están presentes en $C_k^3$. $\rightarrow$ **1 pts.** |

4. (8 pts.) **Laplace.**

   (a) (5 pts.) Considere un sistema continuo LTI descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

   i. (2 pts.) Determine la respuesta de frecuencia $H(s)$ como la razón de dos polinomios en $s$. Bosqueje el diagrama de polos y ceros.

   ii. Determine la respuesta al impulso $h(t)$ en los siguentes casos:

   A. (1 pt.) El sistema es causal

   B. (1 pt.) El sistema es estable

   C. (1 pt.) El sistema no es causal ni estable

   (b) (3 pts.) Encuentre la Transformada Inversa de Laplace de

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4}$$

   para una señal derecha.

**Solución:**

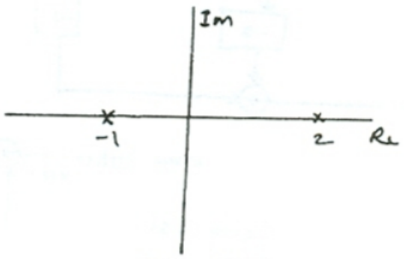
(a) i. Escribiendo la ecuación en el dominio de Laplace:

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

es decir,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

El diagrama de polos y ceros es




$\rightarrow$ **1 pts.**.

ii. La expansión en fracciones parciales es

$$H(s) = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}$$

A. Para un sistema causal la señal tiene que ser derecha, $\Re\{s\} > 2$, es decir

$$h(t) = (\frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3})\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

B. Para un sistema es estable la señal debe ser bilateral, $-1 < \Re\{s\} < 2$, es decir

$$h(t) = -\frac{e^{2t}}{3}\sqcap(-t) - \frac{e^{-t}}{3}\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

C. Para un sistema no causal ni estable, la señal debe ser izquierda, $\Re\{s\} < -1$, es decir

$$h(t) = (-\frac{e^{2t}}{3} + \frac{e^{-t}}{3})\sqcap(-t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Los polos son $(2i, -2i)$. Calculemos los residuos

El residuo del primer polo es

$$\lim_{s\to 2i} \frac{e^{st}(s+2)(s-2i)}{(s+2i)(s-2i)} = \frac{e^{2it}(2i+2)}{(2i+2i)} = \frac{e^{2it}(2i+2)}{(4i)} = \frac{e^{2it}}{2} + \frac{e^{2it}}{2i} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

El residuo del segundo polo es

$$\lim_{s\to -2i} \frac{e^{st}(s+2)(s+2i)}{(s+2i)(s-2i)} = \frac{e^{-2it}(-2i+2)}{(-2i-2i)} = \frac{e^{-2it}(-2i+2)}{(-4i)} = \frac{e^{-2it}}{2} + \frac{e^{-2it}}{-2i} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Sumando ambos residuos,

$$\boxed{h(t) = (\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

5. (10 pts.) **Ecuaciones diferenciales.**

   (a) (5 pts.) **Oscilador acoplado.** Considere el siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$w'(t) = y(t) + x(t)$$
$$y'(t) = -w(t)$$

   Considerando el sistema $x(t) \to y(t)$:

   i. (2 pts.) Encuentre la función de transferencia $H(s)$ del sistema.
   ii. (1 pts.) Determine el número de polos y ceros de $H(s)$.
   iii. (1 pts.) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.
   iv. (1 pts.) Encuentre la respuesta al escalón $h\sqcap(t)$ del sistema.

   (b) (5 pts.) **Segundo orden.** Considere el sistema $x(t) \to y(t)$ descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 3x'(t) + 6x(t)$$

   i. (2 pts.) Encuentre la respuesta de frecuencia del sistema $H(\omega)$.
   ii. (2 pts.) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$.
   iii. (1 pts.) Encuentre $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = \delta(t+4)$.

**Solución:**

(a) La ecuación diferencial del sistema es

$$y''(t) + y(t) = -x(t)$$

Tomando la Transformada de Laplace:

$$s^2Y(s) + Y(s) = -X(s)$$

i. Entonces

$$\boxed{H(s) = \frac{-1}{s^2+1}} \to \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

ii. Claramente $H(s)$ no tiene ceros y tiene dos polos en $\pm i \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$ .

iii. Para calcular la inversa de la respuesta de frecuencia, podemos utilizar pares conocidos, fracciones parciales o bien el Teorema de los residuos de Cauchy. En este caso

$$\boxed{h(t) = -\operatorname{sen}(t)\sqcap(t)} \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

iv. En este caso tenemos

$$s^2Y(s) + Y(s) = -\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-1}{s(s^2+1)}$$

El residuo del primer polo es

$$\lim_{s\to 0} -\frac{e^{st}s}{s(s+i)(s-i)} = -\frac{1}{-i^2} = -1$$

El residuo del segundo polo es

$$\lim_{s\to i} -\frac{e^{st}(s-i)}{s(s+i)(s-i)} = -\frac{e^{it}}{i(i+i)} = -\frac{e^{it}}{2i^2} = \frac{e^{it}}{2}$$

El residuo del tercer polo es

$$\lim_{s\to -i} -\frac{e^{st}(s+i)}{s(s-i)(s+i)} = -\frac{e^{-it}}{-i(-i-i)} = -\frac{e^{-it}}{2i^2} = \frac{e^{-it}}{2}$$

Es decir,

$$\boxed{y(t) = h\sqcap(t) = (\cos(t) - 1)\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Podemos escribir la ecuación diferencial directamente en el dominio de Fourier utilizando la propiedad de la derivada

$$(i\omega)^2Y(\omega) + 5i\omega Y(\omega) + 4Y(\omega) = 3i\omega X(\omega) + 6X(\omega)$$

i. La respuesta de frecuencia del sistema es

$$\boxed{H(\omega) = \frac{3i\omega + 6}{-\omega^2 + 5i\omega + 4}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

ii. Para encontrar la respuesta al impulso $h(t)$, expandimos la respuesta de frecuencia en fracciones parciales.

$$H(\omega) = \frac{A}{1+i\omega} + \frac{B}{4+i\omega}$$

Encontramos que $A = 1$ y $B = 2$, por lo que

$$H(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{2}{4+i\omega} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Es decir,

$$\boxed{h(t) = (e^{-t} + 2e^{-4t})\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

iii. Si la entrada es $x(t) = \delta(t+4)$, la salida es simplemente la convolución de la respuesta al impulso con un impulso desfasado en 4, es decir, resulta la respuesta al impulso desfasada en 4:

$$\boxed{y(t) = (e^{-t+4} + 2e^{-4(t+4)})\sqcap(t+4)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

6. (10 pts.) **Transformada Coseno Discreta.** Se define la Transformada Coseno Discreta (versión II) $F_c[k]$ de una secuencia $f[n]$ como

$$F_c[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cos[\frac{\pi}{2N} k(2n+1)]$$

Considere además la secuencia auxiliar $g[m]$ dada por

$$g[m] = \begin{cases} 0, & m \quad \text{par} \\ f[\frac{m-1}{2}], & m = 1, 3, \ldots, 2N-1 \\ f[\frac{4N-1-m}{2}], & m = 2N+1, 2N+3, \ldots, 4N-1 \end{cases}$$

(a) (3 pts.) Determine la relación entre la DCT de $f[n]$ y la DFT de $g[n]$.

(b) (3 pts.) En base a la respuesta anterior, diseñe un algoritmo para calcular la DCT a partir de la DFT.

(c) (2 pts.) Determine si la propiedad de simetría $F_c[-k] = F_c[k]$ es válida.

(d) (2 pts.) Encuentre expresiones para $F_c[k+2N]$ y $F_c[k+4N]$.

**Solución:**

(a) Tomemos la DFT de $g[n]$:

$$G[k] = \frac{1}{4N} \sum_{n=0}^{4N-1} g[n] \mathcal{W}_{4N}^{kn}$$

Tomando sólo los términos impares,

$$G[k] = \frac{1}{4N} \sum_{n=0}^{2N-1} g[2n+1] \mathcal{W}_{4N}^{k(2n+1)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Considerando que la segunda parte de $g[n]$ es simétrica (reversando $n$) de la primera parte,

$$G[k] = \frac{1}{4N} \sum_{n=0}^{N-1} g[2n+1] \mathcal{W}_{4N}^{k(2n+1)} + \frac{1}{4N} \sum_{m=0}^{N-1} g[4N-2m-1] \mathcal{W}_{4N}^{k(4N-2m-1)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

De acuerdo a la definición de $g[n]$ podemos reemplazar $f[n]$ en la ecuación anterior,

$$G[k] = \frac{1}{4N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \mathcal{W}_{4N}^{k(2n+1)} + \frac{1}{4N} \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \mathcal{W}_{4N}^{-(2m+1)k}$$

$$G[k] = \frac{2}{4N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cos\left[\frac{2\pi(2n+1)k}{4N}\right] = \frac{F_c[k]}{2N} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Es decir, la DFT de $g[n]$ es equivalente a $\frac{1}{2N}$ veces la DCT de $f[n]$.

(b) Para calcular la DCT de una secuencia $f[n]$:

i. Extender simétricamente $f[n]$, duplicando el largo de la secuencia. $\rightarrow$ **1 pts.**

ii. Intercalar ceros en los índices $0, 2, 4, \ldots$. $\rightarrow$ **1 pts.**

iii. Tomar la DFT de esta nueva secuencia de largo $4N$, considerar los primeros $N$ términos y escalar por $\frac{1}{2N}$.$\rightarrow$ **1 pts.**

(c) La DCT es símetrica (par), porque $\cos[-\alpha k] = \cos[\alpha k] \rightarrow$ **2 pts.**.

(d) $F_c[k + 2N] = -F_c[k]$, porque

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

$F_c[k + 4N] = F_c[k] = -F_c[k + 2N]$, porque

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

7. (BONUS 5 pts.) **Diseño de Filtro.**

   Se requiere diseñar un filtro continuo, causal, estable, lineal e invariante en el tiempo, que tenga un cero y dos polos. Para frecuencias asintóticamente bajas la magnitud de la respuesta de frecuencia del sistema debe ser $4\omega$. Para frecuencias asintóticamente altas, la magnitud debe ser $100/\omega$. ¿Es posible diseñar este filtro de manera tal que la magnitud de su respuesta de frecuencia sea 50 en $\omega = 5$?. Si la respuesta es si, determine los polos del filtro. Si la respuesta es no, explique por que el diseño no es posible.

   **Solución:**

   Sabemos que la respuesta solicitada se puede lograr con un cero en el origen y dos polos en el semi-plano izquierdo. Entonces, se requiere una respuesta de frecuencia de la forma

$$H(s) = \frac{as}{s^2 + sb + c} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   Para frecuencias muy altas $s^2 \gg s$, por lo que

$$H(s) \approx \frac{a}{s} = 100/\omega \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   por lo tanto podemos aproximar $a \approx 100$.

   Para frecuencias muy pequeñas $s \gg s^2$, por lo que

$$H(s) \approx \frac{a}{c} = 4\omega \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   lo que implica que $c = \frac{a}{4} = 25$.

   Entonces tenemos

$$H(s) = \frac{100s}{s^2 + sb + 25}$$

   Para determinar $b$ sabemos que

$$H(i5) = \frac{100i5}{-25 + bi5 + 25} = \frac{100}{b} = 50$$

   es decir, $b = 2 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$, por lo tanto

$$H(s) = \frac{100s}{s^2 + 2s + 25}$$

   Los polos son entonces,

$$\boxed{s = -1 \pm \sqrt{1 - 25} = -1 \pm \sqrt{24}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$