Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (2 pts.) Encuentre la respuesta al impulso del sistema dado por:

$$g(x) = \int_0^{2x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Solución:

En general para sistemas lineales (este es el caso), se tiene que

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\,h(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

que considera tanto el caso variante como el invariante. Para los casos variantes hay que considerar que la entrada es un impulso desfasado en un factor ξ.

Entonces

$$h(x,\xi) = \sqcap(2x-\xi) - \sqcap(-\xi) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

2. (2 pts.) Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i2\pi x/T}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{i2\pi x/T}}$$

Solución:

Como es usual expandimos la suma geométrica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i2\pi \frac{n}{T}x} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{i2\pi \frac{n}{T}x}$$

De lo que se obtiene de forma trivial que $C_n = (2^{-n} + 3^{-n})\sqcap[n]$.→ **2 pts.**

3. (2 pts). El espectrograma $\mathcal{S}(u,t)$ de una señal representa el contenido de frecuencias u para un instante de tiempo t en una imagen. Se requiere conocer el espectrograma de una señal $f(t) = \cos\left(2\pi t^2\right)$ después de pasar por un proceso de muestreo, consistente en una multiplicación por un Ш de acuerdo a:

$$f_s(t) = \frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) f(t)$$

Bosqueje $\mathcal{S}(u,t)$ de $f_s(t)$.

Solución:

Nos damos cuenta que

$$f(t) = \cos(2\pi u_x t), \quad \text{con } u(t) = t.$$

Ahora analicemos que pasará para un tiempo en particular

$$f_s(t) = \frac{1}{T}\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi u_t t) \rightarrow \tilde{F}(u) = \text{Ш}(Tu) * \frac{1}{2}\left[\delta(u+u_t) + \delta(u-u_t)\right]$$

La frecuencia que varia en el tiempo a veces será entonces interpretada como una frecuencia ascendente o una decreciente según el instante de tiempo

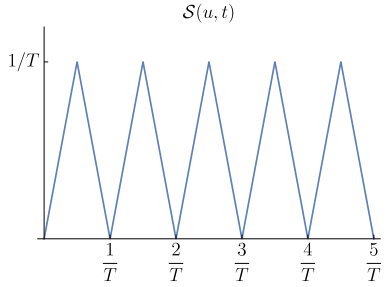


Figure 1: Espectrograma de la señal pedida.

→ **2 pts.**

4. (2 pts). Sea la DFT de una señal $\tilde{f}[n]$ igual a $\tilde{F}[k] = \begin{pmatrix} \underline{0} & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz $\mathcal{W}_N$ tal que $\text{DFT}\{\boldsymbol{f}\} = \mathcal{W}_N \boldsymbol{f}$ para $\boldsymbol{f}_n = f[n]$ con $n = 0, \ldots, N-1$.

   Escriba explícitamente el resultado de $\mathcal{W}_N^3 \boldsymbol{f}$.

   Solución:

   Por propiedad de dualidad se tiene que $\text{DFT}\left\{\text{DFT}\left\{\tilde{f}[n]\right\}\right\} = \frac{1}{N}\tilde{f}[-n]$, luego si aplicamos otra DFT

   $$\text{DFT}\left\{\text{DFT}\left\{\text{DFT}\left\{\tilde{f}[n]\right\}\right\}\right\} = \frac{1}{N}\tilde{F}[-k]. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   Por lo tanto

   $$\mathcal{W}_N^3 \boldsymbol{f} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \underline{0} & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

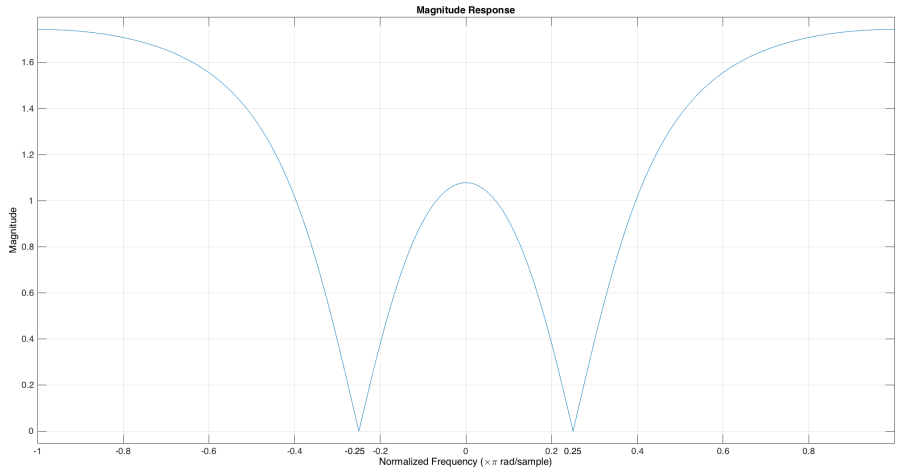
5. (2 pts). Considere la respuesta de sistema de un filtro digital dada por

$$H(z) = \frac{(z - e^{i\pi/4})(z - e^{-i\pi/4})}{(z - 0.5e^{i\pi/4})(z - 0.5e^{-i\pi/4})}$$

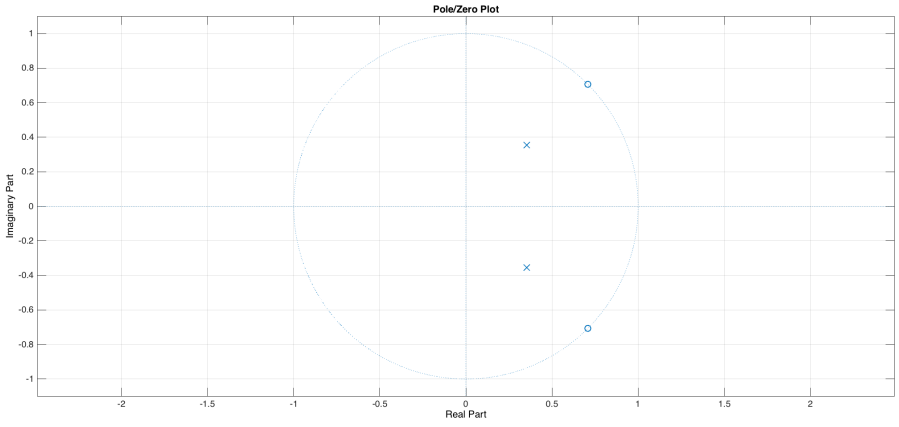
Bosqueje la respuesta de magnitud de dicho filtro, indicando claramente los puntos relevantes y unidades de frecuencia) y el diagrama de polos y ceros.

Solución:

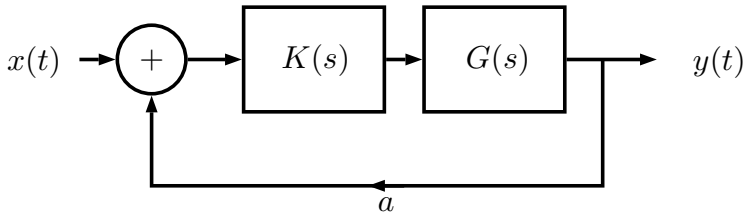
La respuesta de magnitud es → **1 pts.**



y el diagrama de polos y ceros es → **1 pts.**



6. (2 pts). Sea un sistema realimentado representado en diagrama de bloques por ($a > 0$) donde se la llama a $G(s)$ la planta del sistema y a $K(s)$ el controlador. Determine



$K(s) = K$ de tal forma que el sistema realimentado con la planta $G(s) = s + 1$ sea críticamente estable.

Solución:

La función de transferencia del sistema realimentado es

$$H(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 - aK(s)G(s)}$$
$$= \frac{K(s+1)}{1 - aK(s+1)}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para determinar cuando el sistema es críticamente estable, primero debemos encontrar la ubicación de los polos

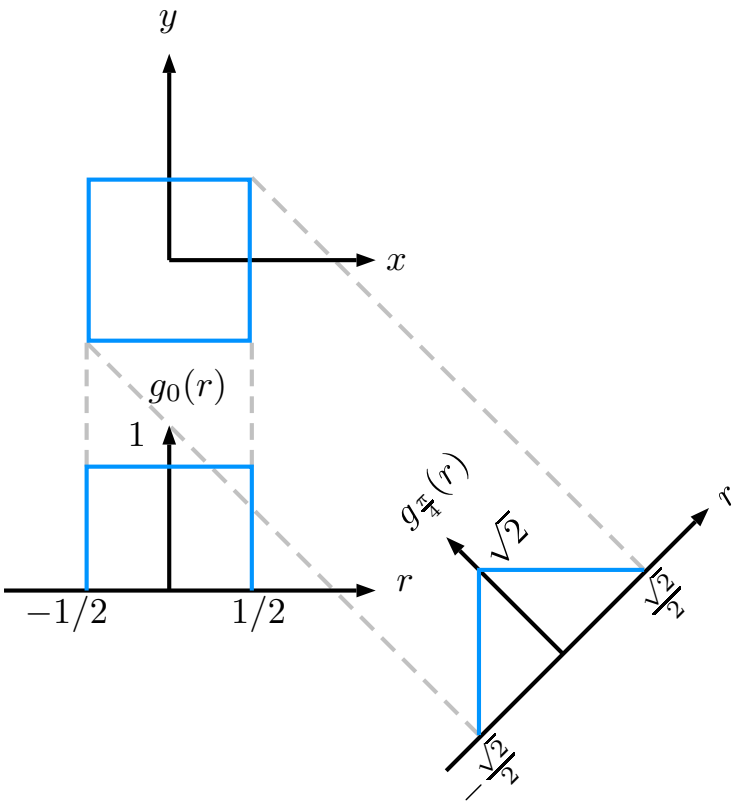
$$1 - aK(s+1) = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{aK} - 1.$$

Y segundo ver que K mueve el polo justamente al eje imaginario. Por lo que si se tiene $s = 0$, esto implicará que $K = \frac{1}{a}$. $\rightarrow$ **1 pts.**

7. (2 pts). Determine la transformada de Radon $g_\theta(r)$ de $f(x,y) = \sqcap(x)\sqcap(y)$ para θ igual a 0 y $\pi/4$.

Solución:

La transformada de Radon en dichos ángulos es → **2 pts.**

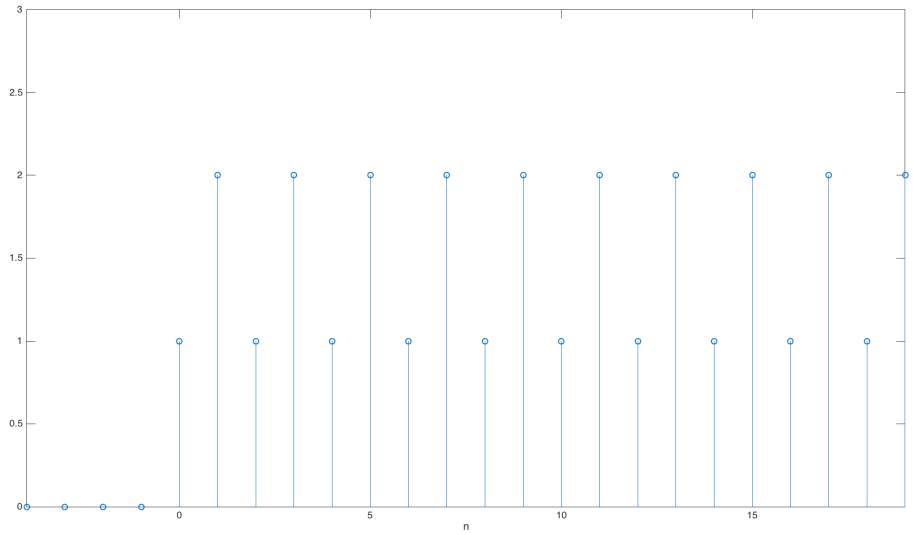


8. (2 pts). ¿Cómo la convolución **cíclica** puede ser usada para obtener una convolución **lineal**?

   Solución:

   Será necesario agregar N ceros al principio y fin de cada vector $f[n]$ y $g[n]$ de tal forma que que el resultado de $f[n] * g[n]$ será exactamente una ventana de largo $3N$ de la convolución lineal.→ **2 pts.**

9. (2 pts). Considere una secuencia discreta periódica derecha (es decir, es una secuencia periódica multiplicada por un escalón) de duración infinita, cuyas primeras veinte muestras se muestran en la siguiente figura:



Determine si es posible construir un sistema discreto que a partir de una entrada escalón unitario genere la secuencia de la figura. En caso positivo, constrúyalo.

Solución:

Primero generemos la secuencia periódica a partir de un impulso, para lo cual necesitamos un sistema que cumpla con:

$$y[n] = y[n-2] + \delta[n] + 2\delta[n-1]$$

Entonces necesitamos implementar el sistema $x_1[n] \rightarrow y[n]$ de acuerdo a:

$$y[n] = y[n-2] + x_1[n] + 2x_1[n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Ahora, lo que resta es poder producir el impulso a partir de la entrada escalón unitario, lo que logramos fácilmente al notar que

$$\delta[n] = \sqcap[n] - \sqcap[n-1]$$

es decir, necesitamos implementar un sistema no-recursivo de primer orden $x[n] \rightarrow x_1[n]$, de acuerdo a

$$x_1[n] = x[n] - x[n-1]$$

El sistema completo, es entonces

$\boxed{y[n] = y[n-2] + x[n] + x[n-1] - 2x[n-2]} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$