Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 6

Fecha de entrega: 17 de abril de 2022

---

1. ¿Cuantas frecuencias tiene un coseno?

   Un coseno tiene dos frecuencias. Le dirección hacia adelante en el tiempo y hacia atrás en el tiempo. Para demostrar esto tomamos su transformada de Fourier, que nos muestra la distribución de frecuencias de la señal:

   $$\mathcal{F}\{\cos(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) e^{-i2\pi ux} \, \mathrm{dx}$$

   Para resolver esto, escribimos coseno en su forma exponencial:

   $$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

   Sustituyendo esto en la integral:

   $$\mathcal{F}\{\cos(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^{-i2\pi ux} \, \mathrm{dx}$$

   Observemos que el factor $\frac{1}{2}$ puede salir de la integral y que podemos utilizar propiedad distributiva:

   $$\mathcal{F}\{\cos(x)\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} e^{-i2\pi ux} + e^{-ix} e^{-i2\pi ux} \, \mathrm{dx}$$

   Observemos que se pueden separar las integrales porque el integrador es un operador lineal:

   $$\mathcal{F}\{\cos(x)\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} e^{-i2\pi ux} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} e^{-i2\pi ux} \, \mathrm{dx}$$

   Observemos que esto es similar a la transformada de Fourier de un impulso desplazado en $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. Por lo tanto, aplicando Fourier a cada componente y considerando dualidad:

$$\mathcal{F}\{\cos(x)\} = \frac{1}{2}\left(\delta\left(x + \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(x - \frac{1}{2\pi}\right)\right)$$

Observemos que esto significa que la distribución espectral del coseno se divide en dos concentraciones de frecuencia, una en $\frac{1}{2\pi}$ y otra en $\frac{-1}{2\pi}$. **Esto significa que el coseno tiene 2 frecuencias**.

2. Sabemos que la salida de un sistema LTI corresponde a la convolución de su entrada con su respuesta al impulso. Explique por qué resultaría conveniente analizar sistemas lineales e invariantes en el dominio de Fourier.

   Esto guarda relación con la propiedad de la convolución en Fourier:

   $$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(u)G(u)$$

   Notemos que la convolución de la entrada de un sistema LTI con la respuesta al impulso, se puede escribir fácilmente como la transformada de Fourier inversa de la multiplicación de las transformadas de Fourier de cada función:

   $$y(t) = \{x * h\}(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x\}(u) \cdot \mathcal{F}\{h\}(u)\}(t)$$

   La multiplicación es más fácil de trabajar que la convolución y **cuando un problema está muy difícil en un dominio, es conveniente cambiarse de dominio para resolverlo.**

   La transformada de Fourier de la respuesta al impulso se llama respuesta de frecuencia:

   $$\mathcal{F}\{h\}(u) = H(u)$$

3. Defina los conceptos:

   - Filtro pasa bajos:

     Es un filtro que permite solo el paso de frecuencias bajas en magnitud. En frecuencia se puede ver como una función del tipo:

     $$F(u) = \sqcap\left(\frac{u}{2f_c}\right)$$

     Donde $\sqcap$ es rect y f_c una frecuencia de corte, que es la frecuencia máxima que el filtro dejaría pasar. Notemos que los filtros se diseñan para **magnitud**, por lo que **para definir si una frecuencia es alta o no, no le importa el signo**.

- Filtro pasa altos

  Es un filtro que permite solo el paso de frecuencias altas. En frecuencia se puede ver como una función del tipo:

  $$F(u) = u_c\,(u - f_c)$$

  Donde u_c es escalón y f_c una frecuencia de corte, que es la frecuencia mínima que el filtro dejaría pasar.

- Filtro pasa banda

  Es un filtro que solo permite el paso de frecuencias en un rango específico, entre una mínima f_{c1} y una máxima f_{c2}. Se puede modelar como un $\sqcap$ correctamente desplazado (el desplazamiento será el centro de la banda) y correctamente escalado (el escalamiento determina el ancho de la banda). Si la banda tiene centro c y frecuencias de corte $c - f_c$ y $c + f_c$:

  $$F(u) = \sqcap\left(\frac{u - c}{2f_c}\right)$$

- Filtro rechaza banda

  Un filtro rechaza banda es aquel que deja pasar todas las frecuencias excepto una banda específica. Si esta banda tiene centro c y frecuencias de corte $c - f_c$ y $c + f_c$ se ve matemáticamente como:

  $$F(u) = 1 - \sqcap\left(\frac{u - c}{2f_c}\right)$$

A continuación se muestra una imagen **en Fourier** de los diferentes tipos de filtro.



4. Encuentre la respuesta al impulso de un sistema cuya respuesta de frecuencia está dada por:

$$H(u) = \begin{cases} e^{-\frac{i\pi}{2}} & \forall u > 0 \\ \\ e^{-\frac{-i\pi}{2}} & \forall u < 0 \end{cases}$$

Para comenzar a resolver esto es **fundamental** saber que **la respuesta al impulso de un sistema es la transformada de Fourier inversa de la respuesta en frecuencia del sistema**[1].

Usando fórmula de Euler, tenemos que:

$$e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i \qquad e^{-\frac{-i\pi}{2}} = i$$

Entonces, si reescribimos la respuesta en frecuencia:

$$H(u) = \begin{cases} -i & \forall u > 0 \\ \\ i & \forall u < 0 \end{cases}$$

Podemos notar que esto corresponde a:

$$H(u) = -i \text{ signo}(u)$$

La transformada de Fourier de signo es conocida[2]:

$$\mathcal{F}\{\text{signo}(x)\}(u) = \frac{1}{\pi i u}$$

Usando **dualidad**:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\text{signo}(u)\}(x) = -\frac{1}{\pi i x}$$

Ahora, lo que buscamos es $\mathcal{F}^{-1}\{-i\text{signo}(u)\}(x)$. Por linealidad de Fourier tenemos que:

$$\mathcal{F}^{-1}\{-i \text{ signo}(u)\}(x) = -i\mathcal{F}^{-1}\{\text{signo}(u)\}(x)$$

Sustituyendo la transformada de Fourier inversa de signo y simplificando:

$$\mathcal{F}^{-1}\{-i \text{ signo}(u)\}(x) = -i \cdot -\frac{1}{\pi i x} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\{-i \text{ signo}(u)\}(x) = \frac{1}{\pi x}$$

[1] Esto es una aplicación de la dualidad. La respuesta en frecuencia de un sistema es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso

[2] Usted debe tener al alcance de la mano siempre su tabla de pares de Fourier

Finalmente, tendremos que **la respuesta al impulso del sistema, que es la transformada de Fourier de la respuesta en frecuencia es:**

$$h(x) = \frac{1}{\pi x}$$

5. Investigue y enuncie la transformada de Laplace y describa qué relación tiene con la transformada de Fourier.

   Se define la transformada de Laplace bilateral como:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}\ \mathrm{dx}$$

   Donde s es una variable compleja de la forma: $s = \sigma + i2\pi u$. Podemos notar que **se obtiene la transformada de Fourier cuando la parte real de la transformada de Laplace vale 0**.

6. Encuentre la transformada de Laplace de $u(x)$ si u es escalón. Determine la **región de convergenica** (investigar concepto).

   Utilizando la fórmula antes presentada, sustituyo:

$$\mathcal{L}\{u(x)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-sx}\ \mathrm{dx}$$

   Considerando la definicón de la función escalón[3] se tiene:

$$\mathcal{L}\{u(x)\}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx}\ \mathrm{dx}$$

   A continuación, integramos. Consideremos que usando sustitución simple tenemos:

$$\int e^{-sx}dx = \frac{-1}{s}e^{-sx} + c$$

   Luego, evaluando entre 0 e infinito:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\ \mathrm{dx} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{s}e^{-sx} - \frac{-1}{s}e^{0}$$

   La exponencial e^{-sx} es siempre decreciente y mayor a cero, es conocido que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{s}e^{-sx} = 0$$

[3]Vale 0 para todo valor menor a cero y 1 para todo valor mayor a cero

OBSERVEMOS que esto se cumple siempre y cuando $s > 0$, por lo que la **región de convergencia**, que es el intervalo de valores de s para los que existe la transformada de Laplace es $s > 0$.

Sustituyendo esto y considerando $e^0 = 1$ en la integral:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \, \mathrm{dx} = \frac{1}{s}$$

Luego:

$$\mathcal{L}\{u(x)\}(s) = \frac{1}{s} \quad | \quad s \in (0, \infty)$$