Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 2–2010 — Vicente Parot

Documento #12

Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [8 ptos] **Propiedades.** Resuelva usando propiedades de transformada de Laplace y transformada Z:

   a) [4 ptos] Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ con $\Re\{s\} < a$, ¿Cuál es la región de convergencia de la transformada de Laplace de $e^{ct}f(t)$, con $c \in \mathbb{C}$?

   Resultado: La región de convergencia se ve modificada por la modulación compleja, en este caso, la nueva región de convergencia será $\Re\{s\} < a + \Re\{c\}$.

   b) [4 ptos] Si la transformada Z de $f[n]$ tiene solamente un polo en $z = 1 + i$, ¿Dónde tendrá el polo la transformada Z de $e^{-i\pi n/4}f[n]$?

   Resultado: La propiedad del escalamiento en frecuencia de la transformada Z con $z_0 = e^{-i\pi/4} = (1-i)/\sqrt{2}$ produce que el polo cumpla $z_0^{-1}z = 1 + i$, entonces el polo estará en $z = (1+i)z_0 = \sqrt{2}$.

2. [4 ptos] **Integral.** Calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x)\,\mathrm{sinc}^2(y)e^{-i\frac{2}{3}\pi y}\,dx\,dy$$

   Resultado: Se sabe que la integral de una función $f(x,y)$ es el valor de su transformada $F(u,v)$ en el origen. La transformada de $f(x,y)$ en este caso se puede calcular a partir de pares conocidos:

$$\begin{aligned}
\sqcap(x) &\longrightarrow \mathrm{sinc}\,(u)\\
\mathrm{sinc}^2(x) &\longrightarrow \wedge(u)\\
e^{-i\frac{2}{3}\pi x}\,\mathrm{sinc}^2(x) &\longrightarrow \wedge(u-\frac{1}{3})\\
\sqcap(x)e^{-i\frac{2}{3}\pi y}\,\mathrm{sinc}^2(y) &\longrightarrow \mathrm{sinc}\,(u) \wedge (v-\frac{1}{3})
\end{aligned}$$

   Entonces el resultado es

$$\mathrm{sinc}\,(0) \wedge (0-\frac{1}{3}) = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

3. [6 ptos] **Interpolación lineal.** Un algoritmo discreto recibe un vector de N elementos

$$\tilde{f}[n] = (f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{N-1})$$

y pretende calcular una salida de $2N$ elementos

$$\tilde{g}[n] = \left(f_0 \quad \frac{f_0+f_1}{2} \quad f_1 \quad \frac{f_1+f_2}{2} \quad \dots \quad f_{N-1} \quad \frac{f_{N-1}+f_0}{2}\right)$$

Se tiene una versión incompleta del procedimiento en 5 pasos:

1: Se calcula $\tilde{F}$, la transformada de Fourier discreta de $\tilde{f}$.
2: Se forma un vector $\tilde{HF}$ de $2N$ elementos repitiendo $\tilde{F}$ y dividiendo por dos.
3: Se calcula el vector $\tilde{H}$ como [...]
4: Se calcula el vector $\tilde{G}$ como $\tilde{G}[k] = \tilde{HF}[k]\,\tilde{H}[k]$.
5: Se calcula $\tilde{g}$, la transformada de Fourier discreta inversa de $\tilde{G}$.

a) [4 ptos] Para completar el tercer paso del algoritmo, calcule $\tilde{H}[k]$. Puede usar $\tilde{f}$, $\tilde{F}$, $\tilde{HF}$, N, i, π y funciones seno, coseno y exponencial compleja además de las operaciones básicas.

Resultado: En el espacio, la operación de interpolación equivale a

$$\begin{aligned}\tilde{g}[n] &= \tilde{ff}[n] * \tilde{h}[n] \\ &= (f_0 \;\; 0 \;\; f_1 \;\; 0 \;\; \dots \;\; f_{N-1} \;\; 0) * \left(1 \;\; \frac{1}{2} \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0 \;\; \frac{1}{2}\right)_{2N}\end{aligned}$$

$\tilde{H}[k]$ se puede calcular por definición de la transformada de Fourier discreta de $\tilde{h}[n]$, recordando que N es el número de elementos de $\tilde{f}$, $2N$ es el número de elementos de $\tilde{g}$.

$$\begin{aligned}\tilde{H}[k] &= \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{2N-1} \tilde{h}[n]e^{-i2\pi kn/2N} \\ &= \frac{1}{2N}\left(\tilde{h}[0]e^{-i2\pi k0/2N} + \tilde{h}[1]e^{-i2\pi k1/2N} + \tilde{h}[2N-1]e^{-i2\pi k(2N-1)/2N}\right) \\ &= \frac{1}{2N}\left(1+\cos(\pi k/N)\right)\end{aligned}$$

b) [2 ptos] Confirme si las constantes de amplificación en el segundo y cuarto paso están correctas y de acuerdo con su respuesta anterior. Si es necesario, indique alguna corrección en estas partes para que el resultado tenga la amplitud requerida según la explicación inicial.

Resultado: En el segundo paso, se debe dividir por dos para mantener el valor central ($n = 0$) en el espacio. Está correcto. En el cuarto paso, hay un error porque la convolución en el espacio equivale al producto de las señales en frecuencia multiplicadas también por el número de elementos. $\tilde{G}$ tiene $2N$ elementos, por lo que falta agregar un factor $2N$ en el paso 4.

4. [4 ptos] **DFT.** Calcule la transformada de Fourier discreta de las siguientes funciones.

   a) [1 pto] En una dimensión,

$$\tilde{f}[n] = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   Resultado:

$$\tilde{f}[n] \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5-3 \\ 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   b) [3 ptos] En dos dimensiones,

$$\tilde{f}[n,m] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -8 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Resultado:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{8}(-8)e^{-i2\pi(0+3l/4)} = -(i^l) = \begin{bmatrix} -1 & -i & 1 & i \\ -1 & -i & 1 & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathcal{F}\left\{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\right\} & \mathcal{F}\left\{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\right\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -8 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 2 & 1+i \\ -2 & -i & 0 & i \end{bmatrix}$$

5. [8 ptos] Estos dos ejercicios han sido agrupados en un problema para ser respondidos en la misma hoja:

   a) [4 ptos] **Muestreo.** Una señal $f(x)$ con contenido de frecuencia no superior a 200 Hz es muestreada a intervalo $T = 1{,}25$ milisegundos. ¿Cómo se puede calcular en forma exacta el valor de $f(x_0)$, en función de las infinitas muestras $f(nT)$, con $n \in \mathbb{Z}$?

   Resultado: La interpolación sinc calcula el valor exacto de la señal si se cumple el criterio de Nyquist. En este caso, se dispone de 2 veces más muestras de las necesarias, esto sólo significa que el valor de la señal se podría calcular exactamente aún si tuviera frecuencias hasta 400 Hz. La suma de funciones sinc ubicadas en la posición de las muestras compone la función original.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{x-nT}{T}\right)$$

$$f(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\mathrm{sinc}\,(x_0/T - n)$$

   b) [4 ptos] **Magnitud y fase.** Grafique magnitud y fase de la función de transferencia en Fourier del sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = \mathrm{sinc}^2(t/2 + 1/4)$.

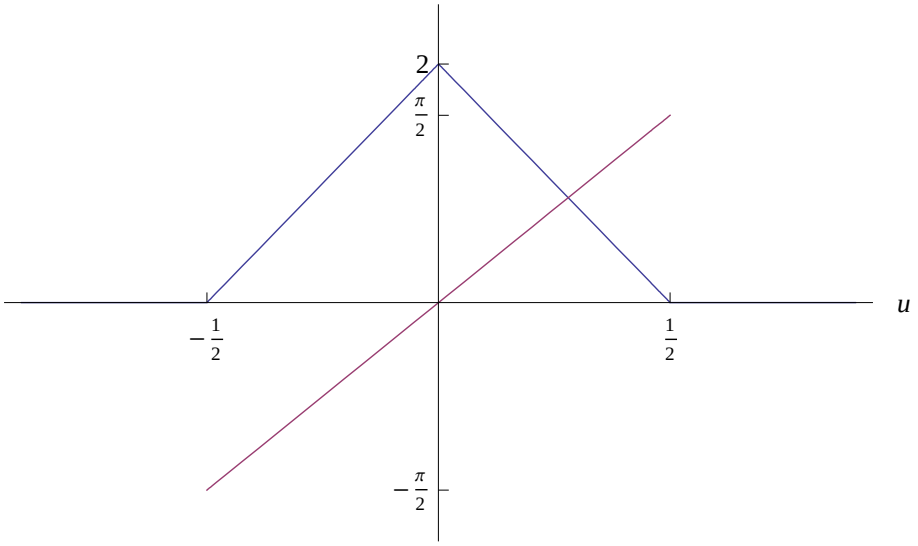
   Resultado:

$$\mathrm{sinc}^2(t) \longrightarrow \wedge(u)$$

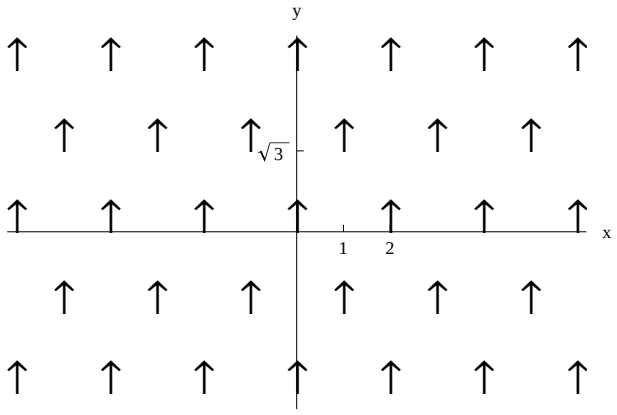
$$\mathrm{sinc}^2(t/2) \longrightarrow 2 \wedge (2u)$$

$$\mathrm{sinc}^2((t+1/2)/2) \longrightarrow e^{i\pi u} 2 \wedge (2u)$$

   La magnitud es $2 \wedge (2u)$ y la fase es $\phi(u) = \pi u$.



6. [6 ptos] **Hexagonal.** A diferencia del tradicional muestreo cartesiano, donde una señal bidimensional se multiplica por $\text{Ш}(x,y)$, se puede considerar un muestreo hexagonal, multiplicando la señal por la función $\text{hex}_d(x,y)$. La función $\text{hex}_d(x,y)$ está formada por la suma de infinitos impulsos ${}^2\delta(x,y)$ de magnitud unitaria, cada uno de los cuales está a una distancia d de otros 6 impulsos que forman un hexágono regular de lado d en el plano (x,y). Hay un impulso en el origen y otro en la posición $(d,0)$. La figura muestra un esquema de $\text{hex}_2(x,y)$.



$\text{hex}_2(x,y)$

a) [3 ptos] Determine una expresión analítica para $\text{hex}_2(x,y)$.
Resultado: Una posibilidad es multiplicar una función $\text{Ш}(x)$, que consiste en impulsos de línea paralelos a uno que va por la recta $x=0$ y que pasan por $x-n=0,\ n\in\mathbb{Z}$ por otra función de impulsos de línea paralelos a la recta $y=\sqrt{3}x$, es decir, que pasan por

$$\begin{aligned} y-\sqrt{3}(x-2n)&=0\\ \frac{y}{2\sqrt{3}}-\frac{x}{2}-n&=0,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

La magnitud de los impulsos resultantes se puede calcular usando una aproximación del impulso

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}\sqcap\left(\frac{x}{\tau}\right)\frac{1}{\tau}\sqcap\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{y}{2\sqrt{3}}-\frac{x}{2}\right)\right)\,dx\,dy$$

Esto es igual al área de un paralelógramo que intersecta a los ejes donde $\sqcap(1/2)$

$$\begin{aligned}\frac{x_0}{\tau}&=\frac{1}{2}, &\quad x_0&=\frac{\tau}{2}\\ \frac{1}{\tau}\left(\frac{y_0}{2\sqrt{3}}-\frac{0}{2}\right)&=\frac{1}{2}, &\quad y_0&=\sqrt{3}\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}\sqcap\left(\frac{x}{\tau}\right)\frac{1}{\tau}\sqcap\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{y}{2\sqrt{3}}-\frac{x}{2}\right)\right)\,dx\,dy&=\frac{1}{\tau^2}\cdot 2\frac{\tau}{2}\cdot 2\sqrt{3}\tau\\ &=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Entonces, ponderando por este valor para obtener impulsos ${}^2\delta(x,y)$ de magnitud unitaria,

$$\begin{aligned}\mathrm{hex}_2(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{y}{2\sqrt{3}} - \frac{x}{2} - n\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Ш}(x) \text{Ш}\left(\frac{y}{2\sqrt{3}} - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Ш}\left(x, \frac{y}{2\sqrt{3}} - \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

b) [3 ptos] Encuentre la transformada de Fourier 2D de $\mathrm{hex}_2(x,y)$ y dibuje un esquema como en el enunciado.

Resultado: La transformada de Fourier se puede encontrar en base a un par conocido y usando el teorema de transformación afín.

$$\text{Ш}(x,y) \longrightarrow \text{Ш}(u,v)$$

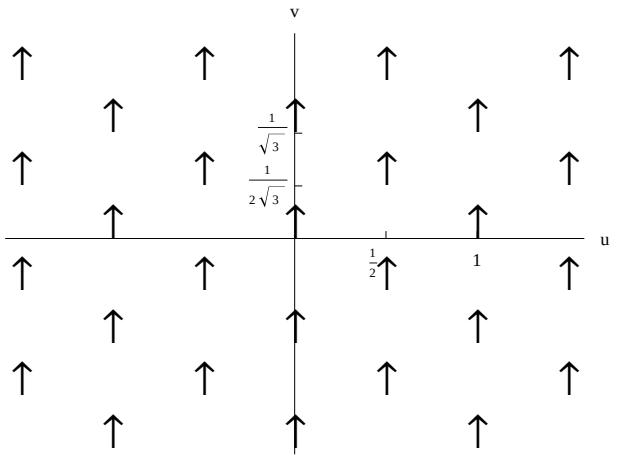
$$x' = x,\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y$$

$$S_x = 1,\ S_y = \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \sigma_x = 0,\ \sigma_y = -\frac{1}{2},\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

$$\Delta = S_x S_y - \sigma_x \sigma_y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{S_y u - \sigma_y v}{\Delta} = u + \sqrt{3}v,\ \frac{-\sigma_x u + S_x v}{\Delta} = 2\sqrt{3}v$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Ш}\left(x, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y\right) \longrightarrow \text{Ш}(u + \sqrt{3}v, 2\sqrt{3}v) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathrm{hex}_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(v,u)$$



$\mathcal{F}\{\mathrm{hex}_2(x,y)\}$