Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 2

2 de Septiembre 2022

Un sistema LTI tiene respuesta al impulso $h(t) = e^{-x} \sqcap (x)$. A partir de esto, responda las siguientes preguntas

1. [3 puntos] ¿Cual es la salida del sistema si la entrada es $f(t) = e^{-x} \sqcap (x)$? Encuentre una expresión analítica.

   Sabemos que la salida de un sistema LTI ($g(x)$) corresponde a la convolución de la entrada ($f(x)$) con la respuesta al impulso ($h(x)$). Entonces:

   $$g(x) = \{f * h\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)h(x-a)da$$

   En el esquema de este problema tenemos que:

   - Entrada: $e^{-x} \sqcap (x)$
   - Respuesta al impuslo: $e^{-x} \sqcap (x)$

   Reemplazando esto en la convolución:

   $$g(x) = \{f * h\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a} \sqcap (a) e^{-x+a} \sqcap (x-a)da$$

   Si uso propiedades de las potencias y re ordeno:

   $$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a}e^{a}e^{-x} \sqcap (x-a) \sqcap (a)da$$

   Podemos ver que e^{-x} es constante para a, por lo que lo puedo sacar de la integral:

   $$g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a}e^{a} \sqcap (x-a) \sqcap (a)da$$

   Por otro lado, tenemos que $e^{-a}e^{a} = e^{0} = 1$. Al sustituir en la integral tenemos:

   $$g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap (x-a) \sqcap (a)da$$

Podemos observar que la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x-a) \sqcap (a)da$ es la convolución de un rect con otro rect, lo que se demostró en clase que es un triángulo: $\{\sqcap * \sqcap\}(x) = \wedge(x)$ Entonces, al sustituir esto, el resultado queda:

$$g(x) = e^{-x} \wedge (x)$$

2. [3 puntos] Demuestre que una exponencial compleja de la forma e^{ix} es una auto función del sistema.

   Para resolver esto, tomamos la exponencial compleja como entrada al sistema. Entonces, dado que el sistema es LTI, la salida del sistema es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso:

   $$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a-x)} e^{-a} \sqcap (a)da$$

   Usando propiedades de las potencias:

   $$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{ia} e^{-a} \sqcap (a)da$$

   Dado que e^{ix} no depende de a, podemos sacarlo de la integral:

   $$g(x) = e^{-xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(i-1)} \sqcap (a)da$$

   Utilizando la definición de rect:

   $$g(x) = e^{-xi} \int_{-1/2}^{1/2} e^{a(i-1)} da$$

   Ahora, sabemos que $\int_{-1/2}^{1/2} e^{a(i-1)} da$ es una constante por teorema fundamental del cálculo (la función es continua y acotada en el intervalo) por lo que demostramos que e^{ix} es autofunción del sistema, ya que la salida es la entrada multiplicada por una constante, lo que es la definición de autofunción.

3. **[BONUS 1.5 puntos]** Encuentre la salida del sistema cuando la entrada es $f(x) = \delta_a + u'(x^2) + u(x)$

   La salida del sistema es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso:

   $$g(x) = \left[e^{-x} \sqcap (x)\right] * \left[\delta(x-a) + u'(x^2) + u(x)\right]$$

   Lo que resulta en:

   $$g(x) = e^{-x+a} \sqcap (x-a) + e^{-x} \sqcap (x) * u'(x^2) + e^{-x} \sqcap (x) * u(x)$$