Interrogación 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (6 pts.) **Transformada de Laplace elíptica.** Se define la transformada de Laplace elíptica (se llama así por la trayectoria que genera su base en el plano complejo) como:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_{a,b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{a+b}{2} e^{-st} + \frac{a-b}{2} e^{-s^* t} \right] \mathrm{d}t$$

Exprese en término de relaciones con $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ el resultado de $\mathrm{Re}\{f(t)\} \xrightarrow{\mathcal{L}_{a,b}}$? para las siguientes condiciones (no es necesario que escriba la ROC):

(a) (2 pts.) $f(t)$ cualquiera.

(b) (2 pts.) $f(t)$ real y par. ¿Qué pasará cuando $a = 1$ y $b = 0$?

(c) (2 pts.) $f(t)$ imaginaria pura y par. ¿Qué pasará cuando $a = 1$ y $b = 0$?

Solución:

Primero que todo nos damos cuenta que la transformada elíptica es:

$$F_{a,b}(s) = \frac{a+b}{2} \cdot F(s) + \frac{a-b}{2} \cdot F(s^*)$$

Ahora definiremos una función $g(t) = \mathrm{Re}\{f(t)\} = \dfrac{f(t) + f^*(t)}{2}$.

(a) Luego podemos decir que para todo $f(t)$:

$$\boxed{G_{a,b}(s) = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{F(s) + F^*(s^*)}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{F(s^*) + F^*(s)}{2}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) Si $f(t)$ es real $F(s) = F^*(s^*)$ y par $F(s) = F(-s)$, es decir:

$$\boxed{G_{a,b}(s) = \frac{a+b}{2} \cdot F(s) + \frac{a-b}{2} \cdot F^*(s)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Cuando $a = 1$ y $b = 0$ la transformada elíptica será $G_{1,0}(s) = (F(s) + F^*(s))/2$, como $f(t)$ es par esto puede reescribirse como:

$$\boxed{G_{1,0}(s) = \frac{1}{2} \cdot (F(s) + F^*(-s)) = \mathrm{Her}\{F(s)\}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Por último si $f(t)$ es imaginaria la parte real será 0 $\rightarrow$ **1 pts.** por lo tanto independiente de a y b el resultado es:

$$\boxed{G_{a,b}(s) = 0} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

2. (9 pts.) **Muestreo y reconstrucción.** Sea la señal $f(t) = 4 + 2\cos(150\pi t + \pi/3) + 4\,\text{sen}\,(350\pi t)$.

   (a) (3 pts.) $f(t)$ es muestreada a una frecuencia de 200 muestras por segundo para obtener la señal discreta $f[n]$. Determine $f[n]$, su DTFT, y en caso de haber aliasión, cuales son los componentes de frecuencia aliados.

   (b) (3 pts.) $f[n]$ se reconstruye mediante un interpolador ideal, para obtener la señal análoga $g(t)$. Suponga que el interpolador también opera a la frecuencia de 200 muestras por segundo. Obtenga $g(t)$ y determine si en la operación de reconstrucción se produjo o no aliasión.

   (c) (3 pts.) Bosqueje en forma conjunta las transformadas de Fourier de $f(t)$ (en Hertz), $f[n]$ (en radianes por muestra) y $g(t)$ (en Hertz).

Solución:

(a) La señal $f(t)$ tiene componentes de frecuencia 75 Hz y 175 Hz, lo que implica que la frecuencia mínima de muestreo sin aliasión debiera ser de 350 Hz. Al muestrearse a una frecuencia de muestreo $F_s = 200$ Hz, va a ocurrir aliasión. El período de muestreo es $1/F_s = 0.005$ segundos.

Podemos calcular $f[n]$ evaluando $f(t)$ en $t = nT$, es decir $t = 0.005n$. Por lo tanto

$$f[n] = f(0.005n) = 4 + 2\cos(0.75\pi n + \pi/3) + 4\,\text{sen}\,(1.75\pi n)$$

Notamos que la frecuencia discreta $1.75\pi n$ está fuera del rango $-\pi < \omega < \pi$, por lo que ese componente será aliado a una frecuencia de $1.75\pi n - 2\pi n = -0.25\pi n$ → **1 pts.** Finalmente,

$$f[n] = f(0.005n) = 4 + 2\cos(0.75\pi n + \pi/3) - 4\,\text{sen}\,(0.25\pi n) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

La DTFT, en función de la frecuencia angular ω, puede calcularse fácilmente como

$$F(e^{i\omega}) = 8\pi\delta(\omega) + 2\pi e^{i\pi/3}\delta(\omega - 0.75\pi) + 2\pi e^{i\pi/3}\delta(\omega + 0.75\pi)$$

$$+i4\pi\delta(\omega - 0.25\pi) - i4\pi\delta(\omega + 0.25\pi) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

(b) La función interpolada $g(t)$ puede determinarse de la parte (a) anterior, sustituyendo n por tF_s → **1 pts.** Entonces,

$$g(t) = f[n]|_{n=tF_s} = f[n]|_{n=200t}$$
$$= 4 + 2\cos(0.75\pi 200t + \pi/3) - 4\,\text{sen}\,(0.25\pi 200t)$$
$$= 4 + 2\cos(150\pi t + \pi/3) - 4\,\text{sen}\,(50\pi t) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Tal como es esperable, el componente de 175 Hz se traslapó a una frecuencia de 25 Hz → **1 pts.**

(c) La siguiente figura, en la cual solo se consideran las posiciones de frecuencia de los componentes de Fourier, sin considerar las diferencias de amplitudes, muestra las transformadas de Fourier respectivas. En rojo se muestran los componentes de frecuencia que se traslapan producto del muestreo y reconstrucción.

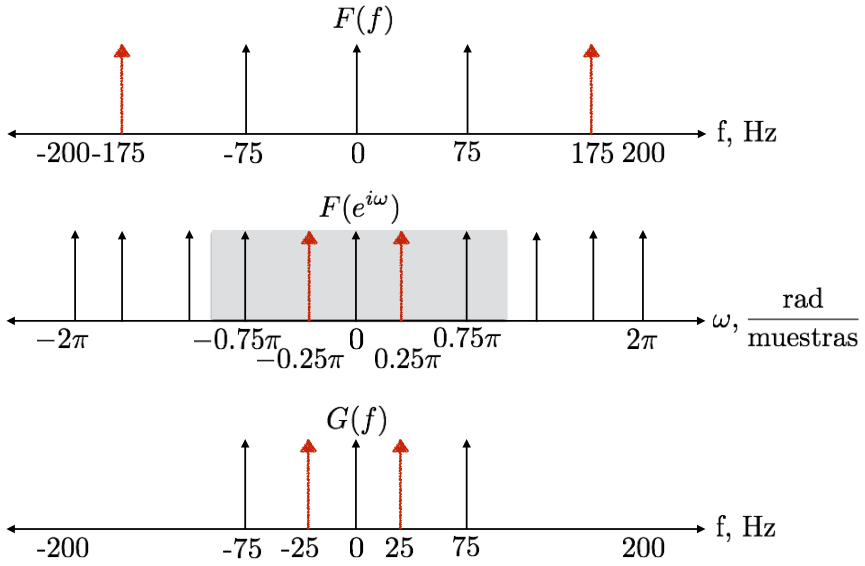


Figure 1: Comparación de Transformadas de Fourier.

→ **1 pts.**

3. (7 pts.) **ROC.** Encuentre las transformadas inversas de:

   (a) (2 pts.) $\dfrac{1}{1-iz^{-1}}, \quad |z|>1$

   (b) (2 pts.) $\dfrac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}, \quad |z|<2$

   (c) (3 pts.) $\log\left(1-1/2\,z^{-1}\right), \quad |z|>1/2$

Solución:

(a) Por propiedades de serie geométrica:

$$\frac{1}{1-iz^{-1}}=\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^{-n}, \quad |z|>1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Luego la secuencia buscada es

$$\boxed{f[n]=i^n \sqcap[n]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

.

(b) Primero simplificaremos la expresión:

$$\frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z|<2 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Como la ROC es izquierda y $-a^n \sqcap[-n-1] \rightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}}$; $|z|<|a|$:

$$\boxed{f[n]=-2^n \sqcap[-n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Si decimos que

$$F(z)=\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right), \quad |z|>1/2$$

y derivamos a los dos lados y se multiplica por $-z$:

$$\begin{aligned} -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) &= -z\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)'}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>1/2 \\ &= -\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

La transformada inversa en $\mathcal{Z}$ será por la propiedad de derivación igual a $nf[n]$:

$$nf[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Por lo que solo será necesario utilizar dicha transformada y dividirla en n para obtener $f[n]$:

$$\boxed{f[n]=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

4. (6 pts.) **Sistema discreto.** Se tiene un sistema LTI que se define de la siguiente forma:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

   (a) (2 pts.) ¿Cuál es su función de transferencia $H(z)$?

   (b) (4 pts.) Sea una función $x[n]$ como la siguiente con $\sqcap_{N+\epsilon}[n]$ un rect de ancho $N+\epsilon$, con $\epsilon > 0$ infinitamente pequeño:

$$x[n] = \binom{N}{n} \sqcap_{N+\epsilon}[n - N/2]$$

   ¿Cuál es la transformada $\mathcal{Z}$ de la salida? Dibuje un diagrama de polos y ceros de $Y(z)$.

Solución:

(a) Como ya es usual una suma hasta el término n-ésimo no es más que una convolución con un escalón:

$$y[n] = \sqcap[n] * x[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Usando la propiedad de la convolución en $\mathcal{Z}$ se tiene que la función de transferencia es:

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Reescribiendo la función $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \delta(n - k)$$

Aplicando transformada $\mathcal{Z}$:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(z^{-1}\right)^k \cdot 1^{N-k} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Por el teorema del binomio esto puede reducirse a:

$$\boxed{X(z) = \left(1 + z^{-1}\right)^N} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Entonces la salida del sistema es éste último resultado multiplicado por $H(z)$, es decir:

$$Y(z) = \left(1 + z^{-1}\right)^{N-1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$Y(z)$ tendrá $N-1$ polos en $z_p = 0$ y $N-1$ ceros en $z_c = -1$, gráficamente esto será:

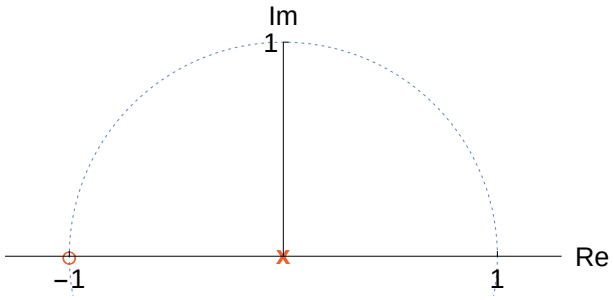
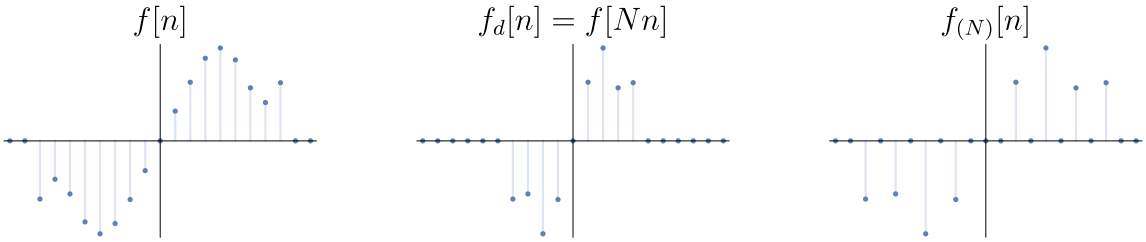


Figure 2: Diagrama de polos y zeros.

→ **1 pts.**

5. (8 pts.) **Decimación y expansión.** Se define la función decimada como $f_d[n] = f[nN]$ y la función expandida como $f_{(N)}[n]$ que será $f[n/N]$ si n es múltiplo de N y 0 si no, todo esto para $N \in \mathbb{N}$.



   (a) (4 pts.) Demuestre que $f_d[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F\left(e^{-i2\pi k/N} z^{1/N}\right)$. *Ayuda:* $\frac{1}{N}\text{DFT}^{-1}\{1\} = \delta[n]$ de largo N.

   (b) (2 pts.) Demuestre que $f_{(N)}[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F\left(z^N\right)$.

   (c) (2 pts.) Se tiene que $a[n] = f_d[n]$ y $b[n] = g_d[n]$, con $g[n] = f[n+1]$ y $N = 2$. ¿Cómo reconstruiría $f[n]$ utilizando $a[n]$ y $b[n]$? ¿A qué es equivalente este proceso en $\mathcal{Z}$?

Solución:

(a) Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_d[n]\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[Nn]\, z^{-n} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Para sumar los mismos términos que antes se usará la DFT de uno, que será $\delta[n]$ de largo N, es decir se multiplicará por cero todos los términos que no sean múltiplos

de N. De este modo se tiene de forma equivalente:

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi kn/N}\right)}_{=\begin{cases}1 & \text{, si } n \text{ es múltiplo de } N\\ 0 & \text{, si no}\end{cases}} z^{-n/N} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Realizando un cambio de orden de las sumatorias:

$$G(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\left(e^{-i2\pi k/N} z^{1/N}\right)^{-n}$$

De lo que se deduce que:

$$\boxed{f_d[n] \rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F\left(e^{-i2\pi k/N} z^{1/N}\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Notamos que la decimación es equivalente a un submuestreo por lo que se produce aliasión en $\mathcal{Z}$.$\rightarrow$ **1 pts.** Como dato curioso se tiene que para $N = 2$:

$$f_d[n] \rightarrow \frac{1}{2}\left[F\left(z^{1/2}\right) + F\left(-z^{1/2}\right)\right]$$

(b) De manera análoga se tiene que:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{(N)}[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n \text{ múltiplo de } N} f[n/N] z^{-n} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $n = Nn'$:

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-Nn}$$

Finalmente:

$$\boxed{f_{(N)}[n] \rightarrow F\left(z^N\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Se ve que $a[n]$ tendría las muestras pares de $f[n]$ y $b[n]$ las impares, luego en el tiempo $f[n]$ sería equivalente a

$$\boxed{f[n] = a_{(2)}[n] + b_{(2)}[n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

que es en el dominio $\mathcal{Z}$ igual a:

$$\boxed{F(z) = A\left(z^2\right) + z^{-1}B\left(z^2\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

6. (6 pts.) **Sistema matricial.** Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) - \mathrm{A}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x_0} \end{aligned}$$

   (a) (2 pts.) Deduzca $\mathbf{X}(s)$ usando la transformada de Laplace unilateral y diga que términos son los que corresponden a entrada cero y cuales a estado cero.

   (b) (4 pts.) Si se tiene $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ y $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, encuentre $\mathbf{x}(t)$.

Solución:

(a) Usando $\mathscr{L}_1$ es fácil darse cuenta que :

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - \mathrm{A})\,\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 &= \frac{1}{s}\mathbf{b} \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbb{I} - \mathrm{A})^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathbf{b} + \mathbf{x}_0\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Luego separando términos se puede relacionar la respuesta a entrada y estado cero:

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(s\mathbb{I} - \mathrm{A})^{-1}\frac{1}{s}\mathbf{b}}_{\text{Estado cero}} + \underbrace{(s\mathbb{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathbf{x}_0}_{\text{Entrada cero}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Reemplazando en la fórmula del punto anterior:

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\left(\frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para calcular la **inversa de una matriz diagonal** simplemente es necesario invertir los términos de la diagonal, por lo que el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}\left(\frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{5}{s+1} \\ \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}} \end{aligned}$$

Usando fracciones parciales en el primer término y sumando se tendrá que:

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} + \dfrac{4}{s+1} \\ \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Solo nos quedará aplicar $\mathscr{L}_1^{-1}$ para obtener el resultado final:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1+4e^{-t} \\ 1+e^{-2t} \end{bmatrix} \sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

7. (8 pts.) **Circuito RLC.** A continuación se presenta un circuito RLC, el funcionamiento de este se puede simplificar a través de las funciones explicadas en el anexo. Se desea caracterizar el comportamiento de este circuito, para esto se le pide calcular lo siguiente:

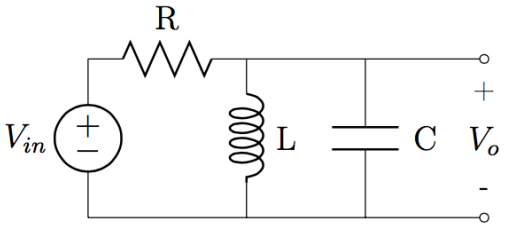


Figura 2: Circuito RLC

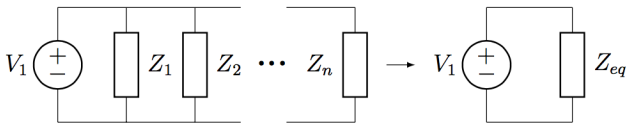
(a) (2 pts.) Obtenga la función de transferencia $H(s) = V_o(s)/V_{in}(s)$.
Dato: $Z_R = R$, $Z_C = 1/(sC)$ y $Z_L = sL$.

(b) (2 pts.) Determine los ceros y polos de la función $H(s)$.

(c) (2 pts.) Dibuje el diagrama de polos y ceros correspondientes a $H(s)$. Para esto utilice $R = 1$ kΩ, $L = 1$ H y $C = 2.5$ μF

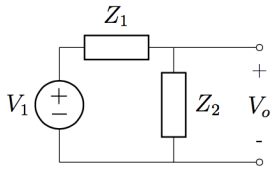
(d) (2 pts.) Con el resultado obtenido en c) realice un esbozo de la respuesta en frecuencia (magnitud y fase) de $H(s)$.

Anexo Circuitos:



$$Z_{eq} = \frac{\prod_{i=1}^{n} Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}$$

(a) Impedancia equivalente en paralelo



$$V_o(s) = \frac{Z_2}{Z_2+Z_1} V_1(s)$$

(b) Divisor de Voltaje

Solución:

(a) Tenemos que el divisor de voltaje es:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{Z_C \parallel Z_L}{Z_C \parallel Z_L + Z_R} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Donde $Z_C \parallel Z_L$ es la impedancia equivalente obtenida con el paralelo de C y L, luego:

$$Z_C \parallel Z_L = \frac{sL}{1 + s^2 LC}$$

De manera que $H(s)$ resulta al sustituir $Z_C \parallel Z_L$:

$$\boxed{H(s) = \frac{sL}{s^2RLC + sL + R}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Se puede apreciar que la función es de segundo orden, con 1 cero y 2 polos. Por simple inspección, el cero corresponde a $s_z = 0 \rightarrow$ **1 pts.** Por otro lado los polos corresponden a las raíces del polinomio, es decir:

$$\boxed{s_p = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2RLC}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Utilizando los valores de R,L y C se obtiene que la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{s}{0.0025s^2 + s + 1000}$$

Los valores de los polos y ceros son:

$$\boxed{s_z = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{s_p = -200 \pm 600i} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Por lo que el diagrama de polos y ceros es: $\rightarrow$ **1 pts.**

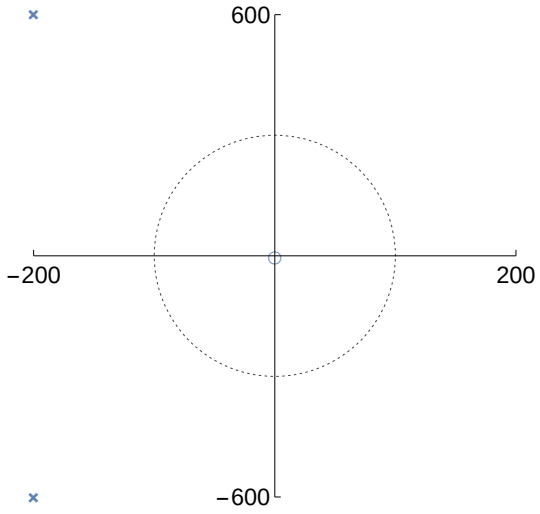


Figure 3: Diagrama de Polos y Ceros (no están a escala).

(d) La respuesta en frecuencia del sistema corresponde a la de un sistema resonante junto a un filtro pasa-altos, esta dualidad se muestra en la figura:

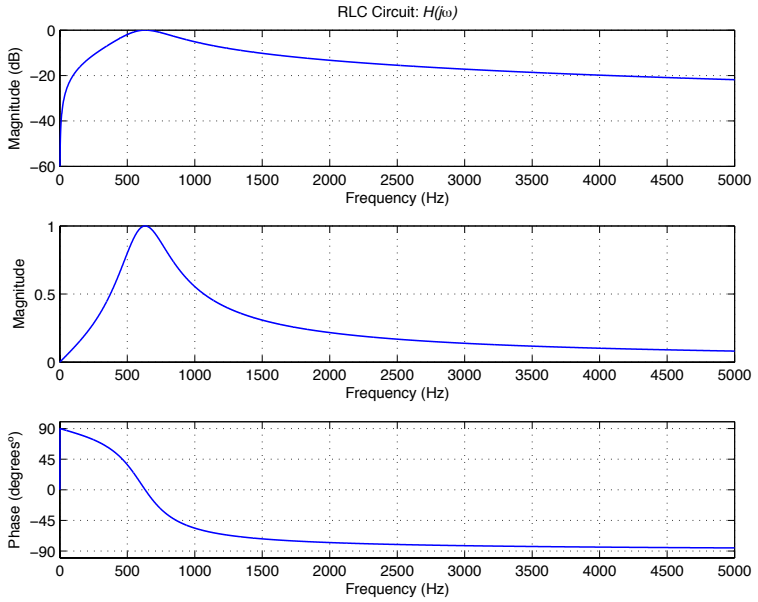


Figure 4: Respuesta en frecuencia.

→ **2 pts.**

8. (**BONUS** 6 pts.) **Teorema de valor final.**

   (a) (3 pts.) Demuestre el teorema de valor final en Laplace, es decir pruebe que:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

   Hint: Use Laplace unilateral.

   (b) (3 pts.) Demuestre el teorema de valor final en el dominio $\mathcal{Z}$, es decir pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z)$$

   Hint: Puede asumir que $f[n] = 0, \quad \forall n < 0$.

Solución:

(a) Partimos de:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\, e^{-st} = sF(s) - f(0) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Luego si tomamos el límite cuando $s \to 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

Es decir,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

De lo que se deduce la propiedad pedida:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) En esta demostración conviene partir del lado derecho y llegar al izquierdo:

$$\begin{aligned} \left(1 - z^{-1}\right) F(z) &= \mathcal{Z}\left\{f[n] - f[n-1]\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(f[n] - f[n-1]\right) z^{-n} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Si hacemos el límite cuando $z \to 1$, quedará una sumatoria telescópica:

$$\lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z) = \lim_{n\to\infty} f[n] - f[-1]$$

$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$ Luego como $f[-1] = 0$ por el hint se tendrá que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z)}$$

$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$