Interrogación 4

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.
- En esta interrogación hay 3 preguntas, todas obligatorias.

---

1. (7 pts). Considere una señal $f(t)$ continua, periódica, real e impar cuya representación en Series de Fourier es

$$f(t) = \sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k \operatorname{sen}(k\pi t)$$

Sea $\hat{f}(t)$ una señal obtenida mediante el muestreo de $f(t)$ mediante un tren de impulsos con período de muestreo $T = 0.2$ [seg].

(a) (4 pts.) Determine si existe traslape (aliasing) al realizar este muestreo.

(b) (3 pts.) Si $\hat{f}(t)$ es filtrada mediante un filtro pasa-bajos ideal con frecuencia de corte $\frac{1}{2T}$ y ganancia T, determine la representación en Series de Fourier de la señal filtrada.

Solución:

(a) Lo único importante para responder esta pregunta es determinar cual es la frecuencia más alta que contiene la señal $f(t) \rightarrow$ **1 pts.**. En Hertz, ésta corresponde a 2.5 Hz$\rightarrow$ **1 pts.**. La frecuencia de muestreo utilizada es $1/0.2 = 5$ Hz, es decir estamos en el caso crítico y no se está cumpliendo de forma estricta el teorema del muestreo $\rightarrow$ **1 pts.**. Por lo tanto la componente de frecuencia 2.5 Hz, quedará aliada a la frecuencia 0 Hz y, en consecuencia, si hay aliasión $\rightarrow$ **1 pts.**.

(b) El filtro pasa-bajos con frecuencia de corte $1/(2 \times 0.2) = 2.5$ Hz, permite realizar una interpolación de banda-limitada en el tiempo, incluyendo la frecuencia 2.5 Hz $\rightarrow$ **1 pts.**. Pero como la señal ya perdió este componente antes del filtrado $\rightarrow$ **1 pts.**, la señal a la salida del filtro será

$$f(t) = \sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k \operatorname{sen}(k\pi t) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

2. (7 pts.) Considere un sistema discreto inicialmente en reposo cuya respuesta al escalón unitario es una secuencia de la forma

$$h_{\vdash}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0, 4, 8, \ldots \\ 2, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ 3, & n = 2, 6, 10, \ldots \\ 4, & n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

   (a) (5 pts.) Haga un diagrama de bloque del sistema, utilizando la menor cantidad de sumas, multiplicadores y retrasos posibles.

   (b) (2 pts.) En base al diagrama anterior, derive la ecuación de diferencias que gobierna el sistema.

Solución:

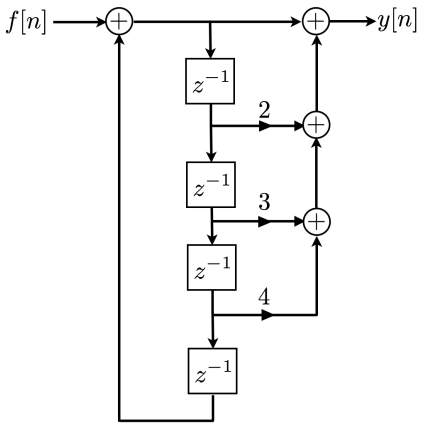
(a) La forma más simple de abordar el problema es diseñando un sistema cuya respuesta al impulso unitario tenga la forma solicitada y luego buscar como producir ese impulso a partir de la entrada dada → **1 pts.**. Observando la periodicidad de la respuesta buscada, es claro que la salida $y[n]$ debe depender de $y[n-4]$ → **1 pts.**.
Para obtener esta salida a partir de un impulso debe cumplirse:

$$y[n] = y[n-4] + \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 4\delta[n-3]$$

Entonces necesitamos implementar el sistema $f[n] \to y[n]$ de acuerdo a:

$$y[n] = y[n-4] + f[n] + 2f[n-1] + 3f[n-2] + 4f[n-3] \to \textbf{1 pts.}$$

El diagrama de bloques, ocupando la mínima cantidad de retrasos (forma Directa II) de este sistema es:



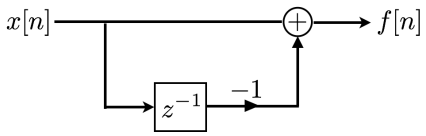
Ahora, lo que resta es poder producir el impulso a partir de la entrada escalón unitario, lo que logramos fácilmente al notar que

$$\delta[n] = \sqcap[n] - \sqcap[n-1]$$

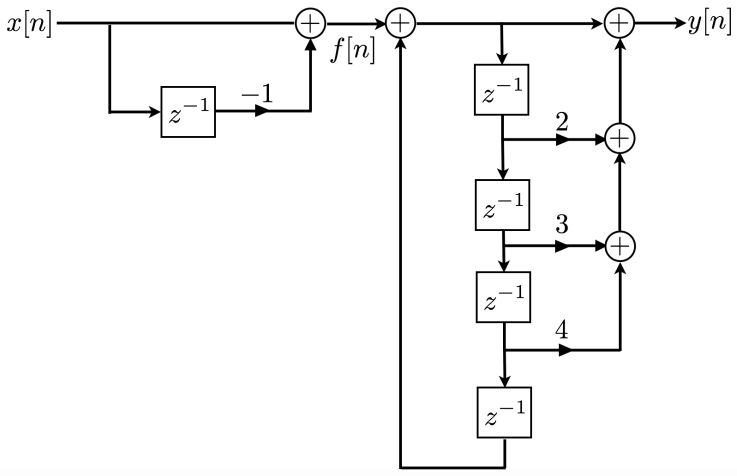
es decir, necesitamos implementar un sistema no-recursivo de primer orden $x[n] \to f[n]$, de acuerdo a

$$f[n] = x[n] - x[n-1] \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

cuyo diagrama de bloque es:



El diagrama de bloques del sistema total $x[n] \to y[n]$ es la conexión en serie de ambos sub-sistemas $\to$ **1 pts.**, tal como lo muestra la figura:



(b) Combinando las ecuaciones de diferencias de ambos sub-sistemas, tenemos:

$$y[n] = y[n-4]+x[n]-x[n-1]+2x[n-1]-2x[n-2]+3x[n-2]-3x[n-3]+4x[n-3]-4x[n-4] \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Simplificando,

$$\boxed{y[n] = y[n-4] + x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] - 4x[n-4]} \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

3. (12 pts.) Sea $\circledast$ la convolución cíclica o circular.

   (a) Pedrito está convencido que la multiplicación de dos polinomios $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a[n] x^n$ y $q(x) = \sum_{n=0}^{N} b[n] x^n$ puede expresarse como

   $$p(x) q(x) = \sum_{k=0}^{2N} (a[n] \circledast b[n])[k] x^k$$

   con $(a[n] \circledast b[n])[k]$ la convolución cíclica evaluada en k de $a[n]$ y $b[n]$.

   i. (3 pts.) Puede ser útil visualizar el caso $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ y $q(x) = 1 + x$ primero (hágalo). ¿Es cierto lo que dice Pedrito?

   ii. (3 pts.) ¿A qué sí sería igual? Explique como llegó a esa conclusión, puede referirse al caso anterior.

   (b) (6 pts.) Se tienen dos funciones $f[n] = 1/N$ y $g[n] = \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right)$ de largo N ¿Cuál es el resultado de $f[n] \circledast g[n]$?

Solución:

(a) Veamos que pasa con lo que propone Pedrito.

i. La convolución cíclica sería

$$a[n] * b[n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \underline{4} & 3 & 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

y si hacemos la multiplicación polinómica resulta

$$p(x) q(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 3x^3. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Luego Pedrito estaba equivocado.$\rightarrow$ **1 pts.**

ii. Debido a que la convolución lineal es

$$a[n] *_l b[n] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

que es igual a la verdadera multiplicación polinómica, se concluye que los coeficientes en realidad son la convolución lineal de los coeficientes de los polinomios anteriores.$\rightarrow$ **2 pts.**

(b) Aplicando definición

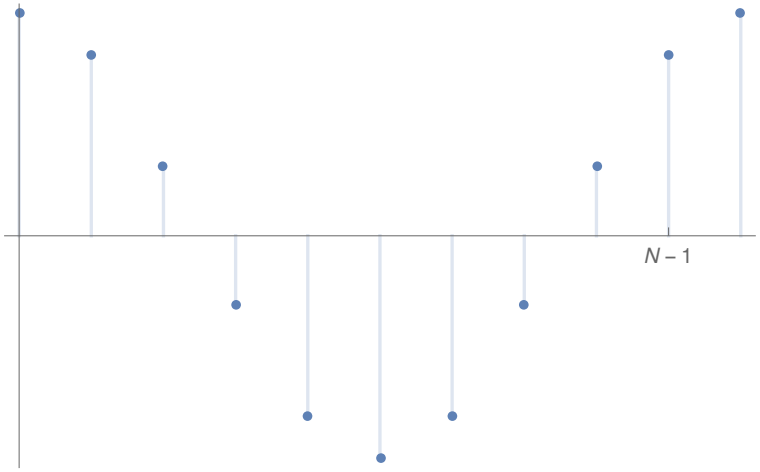
$$f[n] * g[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(2\pi \mathbf{1}\frac{k}{N}\right) \cos\left(2\pi \mathbf{0}\frac{k}{N}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

como se vió en clases los cosenos son ortogonales bajo la operación anterior. Luego al tener distinta frecuencia$\rightarrow$ **3 pts.** serán ortogonales y

$$f[n] * g[n] = 0. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Otra forma de resolver este problema es graficando $\cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right)$ y darse cuenta que



para cualquier desplazamiento cíclico de esta, como se pondera cada valor por uno, deben anularse todos los coeficientes necesariamente. $\rightarrow$ **6 pts.**