Prueba 4 Solución

1. [6 ptos] *DFT.* Sea el par DFT $f[n] \longrightarrow F[k]$. Encuentre $G[k]$, la DFT de $g[n]$, en función de $F[k]$ para las siguientes definiciones. Para cada caso, además de $G[k]$ genérico, encuentre explícitamente $G[0]$.

   (a) $g[0] = f[0]$ y $g[n] = 0$ para $n > 0$.

   (b) $g[0] = 0$ y $g[n] = f[n]$ para $n > 0$.

   (c) $g[n] = f[n] + f[n + N/2]$ (puede suponer N par).

   Solución:

   (a) $g[0] = f[0]$ y $g[n] = 0$ para $n > 0$.
   Tenemos

$$\begin{aligned} G[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{-i2\pi nk/N} \\ &= \frac{1}{N}f[0] \end{aligned}$$

   pero

$$f[0] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k]$$

   por lo que

$$G[k] = \frac{1}{N}(F[0] + F[1] + \cdots + F[N-1]) \text{ para todo } k$$

   y en particular

$$G[0] = \frac{1}{N}(F[0] + F[1] + \cdots + F[N-1])$$

   (b) $g[0] = 0$ y $g[n] = f[n]$ para $n > 0$.

$$\begin{aligned} G[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{-i2\pi nk/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i2\pi nk/N} - \frac{1}{N}f[0] \\ &= F[k] - \frac{1}{N}f[0] \end{aligned}$$

   es decir

$$G[k] = F[k] - \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} F[q]$$

y en particular

$$\begin{aligned} G[0] &= F[0] - \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} F[q] \\ &= F[0] - \frac{1}{N}(F[0] + F[1] + \cdots + F[N-1] \end{aligned}$$

(c) $g[n] = f[n] + f[n + N/2]$ (puede suponer N par).

$$\begin{aligned} G[k] &= F[k] + e^{i2\pi k(N/2)/N} F[k] \\ &= F[k] + e^{i\pi k} F[k] \\ &= F[k] + (-1)^k F[k] \\ &= 2(F[0],\ 0,\ F[2],\ 0,\ F[4]\ ...\ 0) \end{aligned}$$

y en particular

$$G[0] = 2F[0]$$

2. [6 ptos] *Polinomios.* Se tiene dos polinomios (N par) de grados $N-1$ y $N+4$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=5}^{N+4} b_n x^n$$

Se propone usar el siguiente procedimiento para encontrar el producto $f(x)g(x)$ en el dominio de Fourier:

```
A = fft(a)
B = fft(b)
C = A .* B
c = ifft(c)
```

Indique cómo colocar los coeficientes de los polinomios en los vectores `a` y `b`. Y cómo se obtienen los coeficientes del polinomio $f(x)g(x)$ a partir del vector `c`.

Solución: Sabemos que el producto polinomial corresponde a una convolución lineal de sus coeficientes. Y también sabemos que multiplicar punto a punto en el dominio de Fourier corresponde a una convolución cíclica en el dominio del tiempo. En resumen, necesitamos calcular una convolución lineal con una convolución cíclica. Esto se puede hacer acolchando los vectores originales con ceros de manera que no haya aliasión.

Acolchamos con N ceros para formar vectores de largo $2N$. Los ceros se pueden colocar en cualquier lugar, siempre que sepamos interpretar bien el orden en el vector `c`.

$$\texttt{a} = (a_0,\ a_1,\ ...,\ a_{N-1},\ 0,\ ...,\ 0)$$

$$\texttt{b} = (b_5,\ b_6,\ ...,\ b_{N+4},\ 0,\ ...,\ 0)$$

El vector `c` será la convolución cíclica de `a` y `b`

$$\texttt{c} = (a_0 b_5,\ a_0 b_6 + a_1 b_5,\ ...,\ a_{N-1} b_{N+4},\ 0)$$

De observar este vector se puede apreciar que el primer coeficiente corresponde a x^5, por lo que los coeficientes del producto serán los elementos de `c`:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} c[n] x^{n+5}$$

Nótese que $c[2N-1] = 0$, por lo que es irrelevante incluirlo en la sumatoria.

Solución alternativa Consideremos vectores de largo $N+5$, los que se acolchan con otros $N+5$ ceros (indicados después de |)

$$\texttt{a} = (a_0,\ a_1,\ ...,\ a_{N-1},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, |\ 0,\ ...,\ 0)$$

$$\texttt{b} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ b_5,\ b_6,\ ...,\ b_{N+4}, |\ 0,\ ...,\ 0)$$

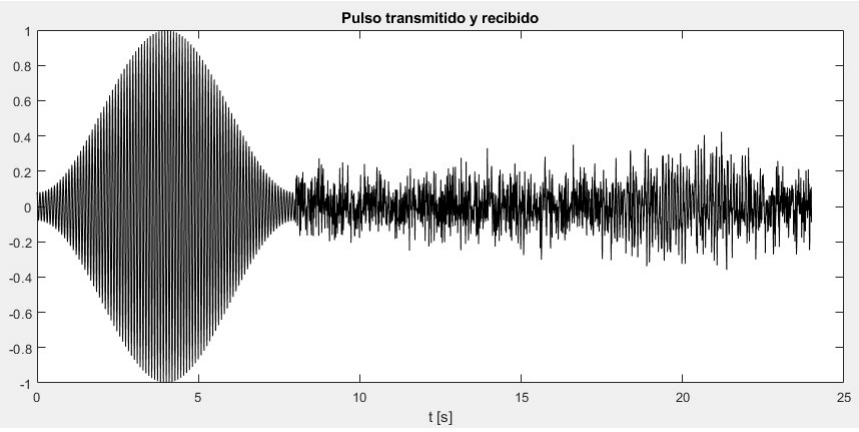
En este caso, la convolución cíclica será

$$\texttt{c} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ a_0 b_5,\ a_0 b_6 + a_1 b_5,\ ...,\ a_{N-1} b_{N+4},\ 0)$$

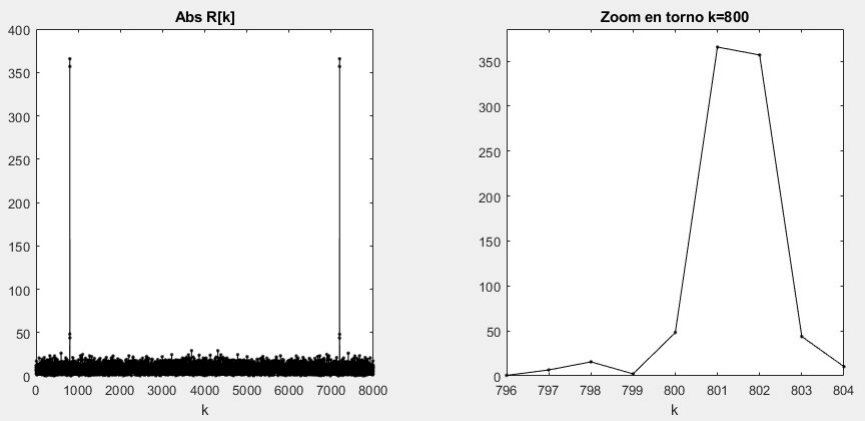
y el polinomio buscado será

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{2N+9} c[n] x^{n}$$

3. [6 ptos] *Radar.* En un modelo simplificado de radar doppler de microondas (donde los valores fueron ajustados a valores poco realistas para facilitar el problema), el radar envía un pulso $p(t)$ de 8 s compuesto de una sinusoide con una envolvente de Hamming. La frecuencia fundamental es de 100 Hz y la longitud de onda es $\lambda = 100$ m.



Comenzando en $t = 8$ s se comienza a recibir señal. El eco, $r(t)$, llega en $t = 16$ s aproximadamente, atenuado y contaminado con ruido. El eco es muestreados con 8000 muestras tomadas cada 1 ms y a las muestras se les toma la DFT, $R[k] = DFT\{r[n]\}$. En la siguiente figura se muestra el valor absoluto de $R[k]$



Encuentre la velocidad del objeto en el que se reflejó el pulso. El encogimiento del pulso (y por lo tanto el aumento de frecuencia) está dado por

$$\Delta f = \frac{v}{u_o}$$

donde v es la velocidad del objeto y u_o es la frecuencia fundamental del pulso.

[**Ayuda:** El enunciado de este problema es mucho más largo que la solución.]

Solución: Como la velocidad del objeto se calcula a partir del cambio en la frecuencia, necesitamos averiguar cuál es la frecuencia fundamental del eco. Del gráfico de $|R[k]|$ tenemos que el máximo está entre $k = 801$ y $k = 802$, por lo que la frecuencia será aproximadamente $801.5 \times U$. Para encontrar U utilizamos $NUT = 1$ con $N = 8000$ y $T = 0.001$

$$U = \frac{1}{NT} = \frac{1}{8}$$

Considerando que la frecuencia original del pulso era $u_o = 100$, tenemos

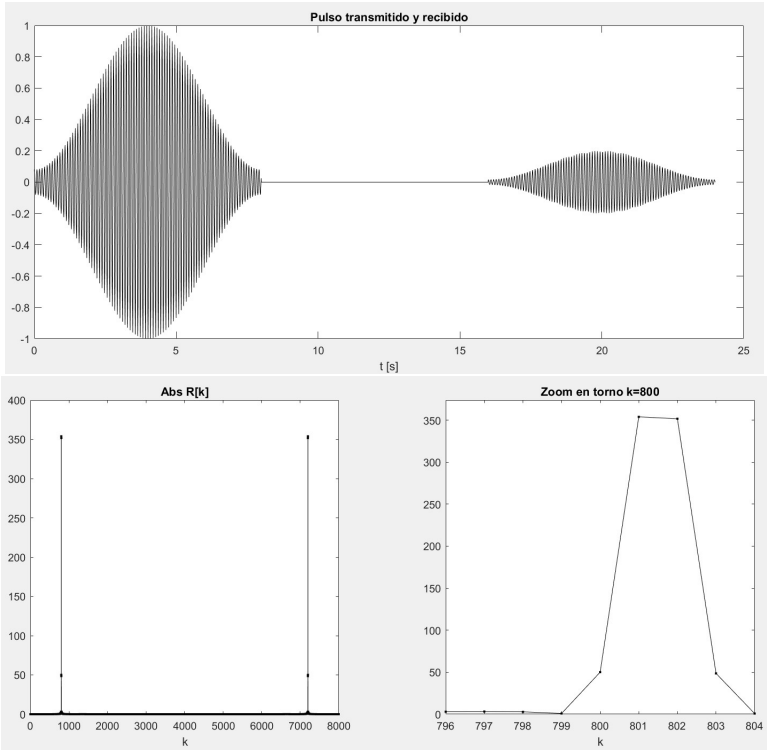
$$\Delta f = \frac{801.5}{8} - 100 = \frac{1.5}{8}$$

y la velocidad del objeto

$$v = u_o \Delta f = \frac{150}{8} = 18.75 \text{ m/s}$$

Como la frecuencia del eco es mayor que la del pulso original, sabemos que el objeto se está moviendo hacia el radar.

Dato de interés. Es impresionante lo insensible que es este procedimiento al ruido. Ustedes resolvieron con un ruido que tiene una desviación estándar igual a la amplitud del eco ($\sigma = 0.2$). Sin ruido sería



Y con un ruido de desviación estándar cinco veces el eco ($\sigma = 1$) tenemos

