Ayudantía 9

DFT

Señales y Sistemas

28 de octubre de 2022

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT

Resumen: DFT

La **Transformada de Fourier discreta** es para señales que son:

- Periódicas y discretas en el tiempo.
- Periódicas y discretas en la frecuencia.

Se define como:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi kn/N}$$

Y su inversa:

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k] e^{i2\pi kn/N}$$

Siempre considerando que:

$$\mathbf{NUT = 1}$$

Resumen: DFT

La transformada de Fourier discreta se puede expresar en forma matricial:

$$F = \mathcal{W} f$$

Donde:

$$f = [f[0] f[1] f[2] .... f[N-1]]^T$$

$$F = [F[0] F[1] F[2] .... F[N-1]]^T$$

¿Que es $\mathcal{W}$?

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W^{0\cdot 0} & W^{1\cdot 0} & W^{2\cdot 0} & \dots & W^{N-1\cdot 0} \\ W^{0\cdot 1} & W^{1\cdot 1} & W^{2\cdot 1} & \dots & W^{N-1\cdot 1} \\ W^{0\cdot 2} & W^{1\cdot 2} & W^{2\cdot 2} & \dots & W^{N-1\cdot 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^{0\cdot N-1} & W^{1\cdot N-1} & W^{2\cdot N-1} & \dots & W^{N-1\cdot N-1} \end{bmatrix}$$

Donde $W = e^{-i2\pi/N}$.

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT

Ejercicio 1: DFT

Calcule la DFT de las siguiente función discreta, asuma que la primera muestra está en el origen:

$$[0\ 1\ 0\ 1]$$

- Para resolver esto se establece $N = 4$ del enunciado, según el período de la secuencia. Luego, aplicando la formula:

$$DFT\{f[n] = [0\ 1\ 0\ 1]\}[k] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} f[n]e^{-i2\pi kn/4}$$

- Para resolver consideramos:

$$f[0] = 0 \qquad f[1] = 1 \qquad f[2] = 0 \qquad f[3] = 1$$

Ejercicio 1: DFT

- Entonces al expandir la sumatoria tendremos:

$$DFT\{f[n]\}[k] = \frac{1}{4}\left(0 \cdot e^{-i2\pi k \cdot 0/4} + 1 \cdot e^{-i2\pi k/4} + 0 \cdot e^{-i2\pi k2/4} + 1 \cdot e^{-i2\pi k3/4}\right)$$

- Al reducir términos se obtiene:

$$DFT\{f[n]\}[k] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi k/2} + e^{-i\pi k3/2}\right)$$

- Reemplazamos para 4 valores de k (dado que la DFT en este caso es periódica de período 4):

$$DFT\{f[n]\}[0] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi 0/2} + e^{-i\pi 03/2}\right) = 0.5$$

$$DFT\{f[n]\}[1] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi/2} + e^{-i\pi 3/2}\right) = 0$$

$$DFT\{f[n]\}[2] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi 2/2} + e^{-i\pi 32/2}\right) = -0.5$$

$$DFT\{f[n]\}[3] = \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi 3/2} + e^{-i\pi 3\cdot 3/2}\right) = 0$$

Ejercicio 1: DFT

- Finalmente, tendremos que:

$$DFT\{f[n]\}[k] = [0.5 \quad 0 \quad -0.5 \quad 0]$$

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT

Ejercicio 2: DFT

Se tiene f[n] con transformada F[k] = [0 1 2 3] y se sabe que $W_N f = F[k]$ donde W_N es la matriz de la DFT. Encuentre $W_N^3 f$.

- Para este ejercicio se usarán dos propiedades de la DFT, las cuales son dualidad ($DFT[F[k]] = \frac{f[-n]}{N}$) y la propiedad del inverso ($DFT[f[-n]] \rightarrow F[-k]$).
- Sabiendo esto vamos aplicando sistemáticamente la DFT a f[n], donde cada DFT es multiplicar una vez por la matriz W_N. Entonces para notación matricial lo escribimos así:

$$W_N f[n] = F[k]$$

Ejercicio 2: DFT

- Aplicamos DFT de nuevo y usamos la propiedad de la dualidad.

$$W_N^2 f[n] = \frac{f[-n]}{N}$$

- DFT y ahora propiedad del inverso.

$$W_N^3 f[n] = \frac{F[-k]}{N}$$

- Por lo tanto lo que se pedía es:

$$W_N^3 f[n] = \frac{1}{4}[0\ 3\ 2\ 1]$$