

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 1

Entrega: 30 de agosto a las 23:59 hrs.

Instrucciones generales

1. Para la parte de implementación, debe adjuntar un código desarrollado en Python.
2. Deben entregar un PDF con el desarrollo llamado *Apellido*_Tarea1.pdf (donde *Apellido* es su apellido).
3. La tarea es individual, pero pueden comentar las preguntas con sus compañeros.
4. Cada eje de los gráfico debe incluir un nombre descriptivo y su respectiva unidad.

Ejercicios teóricos

1. Resuelva los siguientes problemas cortos:

   a) **[0.5 puntos]** Sea una función $f(x)$ cualquiera, encuentre el gráfico de $f(ax-b)$ ¿Cuál es el desplazamiento y el factor de dilatación/contracción de esta última?

   b) **[0.5 puntos]** Escriba la función $sgn(x)$ en función de $u(x)$ donde esta última corresponde a la función escalón.

   c) **[0.5 puntos]** Calcule el área de $\frac{1}{\tau}\sqcap(\frac{x}{\tau})$.

   d) **[0.5 puntos]** Calcule la derivada de $\sqcap(x)$ y $u(x)$.

   Solución:

   a) Si escribimos $f(a(x-b/a))$ notamos que el desplazamiento es b/a y el factor de dilatación/contracción sería a.

   b) Dos soluciones posibles serían:

   $$sgn(x) = u(x) - u(-x) = 2u(x) - 1$$

   c) Por propiedades gráficas de las funciones la señal es un rectángulo de ancho τ y alto $1/\tau$ por lo que el área es igual a 1.

d) El escalón presenta un salto discontinuo en el origen, por lo tanto:

$$\frac{du(x)}{dx} = \delta(x)$$

El rect presenta un salto discontinuo hacia arriba en $x = -1/2$ y hacia abajo en $x = 1/2$, por lo tanto:

$$\frac{d \sqcap (x)}{dx} = \delta(x + 1/2) - \delta(x - 1/2) = 2 \updownarrow (x)$$

2. Considere el sistema con salida $y(t)$ y entrada $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT)$$

a) Muestre si el sistema es:

i) **[0.5 puntos]** Lineal

ii) **[0.5 puntos]** Invariante

b) **[1 punto]** Ahora considere que la entrada del sistema es $x(t) = \cos(2\pi t)$ y grafíquela. Además, grafique a mano $y(t)$ para $T = 1$, $T = 1/2$, $T = 1/4$ y $T = 1/8$.

Asegúrese de que todos los gráficos tengan las mismas dimensiones en los ejes.

Solución:

a) El sistema es lineal porque

$$\begin{aligned} T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(t) + bx_2(t)]\delta(t - nT) \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)\delta(t - nT) + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(t)\delta(t - nT) \\ &= aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

Por otro lado, el sistema es variante porque si $x_1(t) = \sin(2\pi t/T)$, la salida será $y_1(t) = 0$. Sin embargo, si $x_2(t) = \sin(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{2\pi}{T}t) \neq y_1(t + \frac{\pi}{2}) = 0$.

b) La salida está dada por

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\delta(t - nT)$$

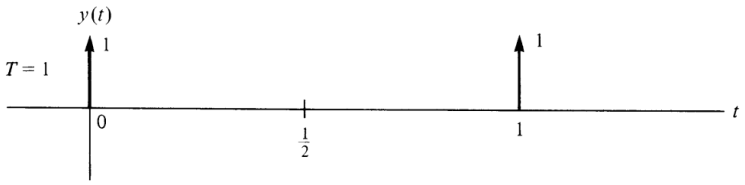


Figura 1: $y(t)$ para $T = 1$

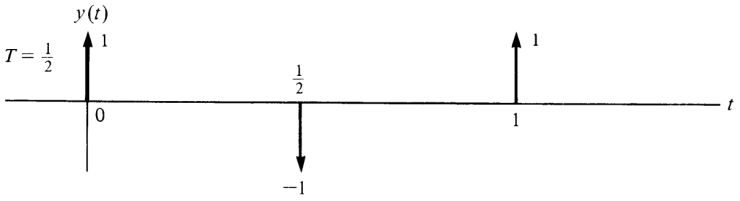


Figura 2: $y(t)$ para $T = 1/2$

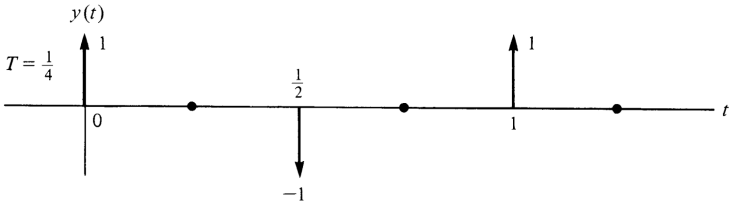


Figura 3: $y(t)$ para $T = 1/4$

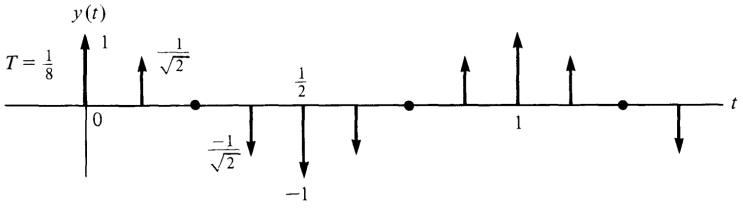


Figure S3.9-5

Figura 4: $y(t)$ para $T = 1/8$

Fin solución Pregunta 2

3. Exprese las siguientes ecuaciones como sumas infinitas de polinomios y determine para qué valores de $|x|$ la serie converge:

   a) **[1 punto]** $p_1(x) = \frac{1}{1-x}$

b) **[1 punto]** $p_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

HINT: Puede ser útil usar series de Taylor.

Solución:

a) Esta pregunta se puede resolver sencillamente sin usar series de Taylor, ya que sabemos que toda serie geométrica tiene solución dada por:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Por lo tanto:

$$p_1(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

Además converge siempre con $|x| < 1$.

b) Se puede resolver de manera similar notando que esa es la solución para la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$. Sin embargo es más razonable hacerla mediante series de Taylor centrada en cero:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)(x^2)}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)(x^n)}{n!}$$

Al desarrollar y reemplazar llegamos a:

$$p_2(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + ...$$

Similarmente esto converge con $\lim_{n\to\infty}\{(n+1)x^n\} = 0$ es decir $|x| < 1$.

4. Un circuito eléctrico se puede modelar como un sistema LTI que presenta una respuesta al impulso dada por:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t),$$

donde R y C son parámetros del circuito. El circuito está diseñado para operar sobre una señal de entrada de la forma:

$$x(t) = A\cos(k\omega_0 t),$$

donde $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, mientras que A y k son constantes arbitrarias.

El objetivo de este ejercicio es deducir el efecto que tiene el sistema sobre una sinusoide de amplitud constante a medida que aumenta su frecuencia ($k\omega_0$). Para lograr esto, responda las siguientes preguntas:

a) **[0.3 puntos]** Indique si el sistema es estable, causal y tiene memoria. Justifique sus respuestas.

b) **[1.5 puntos]** Encuentre la salida analítica del sistema para las siguientes entradas:

1) $x_1(t) = A$
2) $x_2(t) = A\cos(0.01\omega_0 t)$
3) $x_3(t) = A\cos(100\omega_0 t)$

HINT: Puede ser conveniente hacer el cálculo para un caso general con frecuencia $k\omega_0$ y luego evaluar para cada caso particular.

c) **[0.2 puntos]** A partir de los resultados obtenidos, ¿cuál es el efecto que presenta el sistema sobre una sinusoide a medida que aumenta su frecuencia?

Solución:

a) Como $h(t) = 0$ para $t < 0$, el sistema es **causal**. Por otro lado, es evidente que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$ al tratarse de una señal que está acotada y decae exponencialmente a cero, por lo que el sistema es **estable**. Como la salida del sistema está dado por la convolución entre la entrada y una respuesta al impulso con $h(t) = 0$ para $t < 0$, la salida dependerá de una integral que depende de valores pasados de la entrada, por lo que el sistema tiene **memoria**.

b) La salida del sistema será la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso. Es decir, $g(t) = (f * h)(t)$. Se desarrolla la salida para un caso general con $x(t) = A\cos(k\omega_0 t)$:

$$\begin{aligned} g(t) = (f*h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \frac{A}{RC}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(k\omega_0(t-\tau))e^{-\frac{1}{RC}\tau}u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Recordando la identidad $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$, la expresión de convolución queda como:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{A}{2RC}\int_0^{\infty} (e^{j(k\omega_0[t-\tau])} + e^{-j(k\omega_0[t-\tau])})e^{-\frac{1}{RC}\tau}d\tau \\ &= \frac{A}{2RC}\int_0^{\infty} (e^{-\frac{\tau}{RC}+j(k\omega_0[t-\tau])} + e^{-\frac{\tau}{RC}-j(k\omega_0[t-\tau])})d\tau \\ &= \frac{A}{2RC}\left(\frac{e^{jk\omega_0 t}}{\frac{1}{RC}+jk\omega_0} + \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{\frac{1}{RC}-jk\omega_0}\right) \end{aligned}$$

Juntando los términos fraccionarios se llega a:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{A}{2RC}\left(\frac{e^{jk\omega_0 t}\left(\frac{1}{RC}-jk\omega_0\right)+e^{-jk\omega_0 t}\left(\frac{1}{RC}+jk\omega_0\right)}{\frac{1}{R^2C^2}+k^2\omega_0^2}\right) \\
&= \frac{A}{2RC}\left(\frac{\frac{2}{RC}\frac{(e^{jk\omega_0 t}+e^{-jk\omega_0 t})}{2}-2k\omega_0 j\frac{(e^{jk\omega_0 t}-e^{-jk\omega_0 t})}{2}}{\frac{1}{R^2C^2}+k^2\omega_0^2}\right) \\
&= \frac{A}{2RC}\left(\frac{\frac{2}{RC}\cos(k\omega_0 t)+2k\omega_0\sin(k\omega_0 t)}{\frac{1}{R^2C^2}+k^2\omega_0^2}\right) \\
&= A\frac{\cos(k\omega_0)+k\omega_0 RC\sin(k\omega_0 t)}{1+(RCk\omega_0)^2} = A\frac{\cos(k\omega_0 t)+k\sin(k\omega_0 t)}{1+k^2}
\end{aligned}
$$

El enunciado pide las salidas para $k=0$, $k=\frac{1}{100}$ y $k=100$. Usando el resultado general, se llega a:

1) $g_1(t) = A = x_1(t)$
2) $g_2(t) = A\frac{\cos(0.01\omega_0 t)+0.01\sin(0.01\omega_0 t)}{1+0.01^2} \approx A\cos(0.01\omega_0 t) = x_2(t)$
3) $g_3(t) = A\frac{\cos(100\omega_0 t)+100\sin(100\omega_0 t)}{1+100^2} \approx A\frac{1}{100}\sin(100\omega_0 t) \approx 0$

c) Para frecuencias mucho menor a ω_0, el sistema replica la entrada en la salida (aproximadamente). Por otro lado, para frecuencias mucho mayor a ω_0, el sistema entrega una salida con un retardo de 90 grados (el coseno se convierte en seno) y con una gran atenuación (que eventualmente se puede aproximar a cero). Lo anterior implica que el sistema filtra sinusoides de alta frecuencia y deja pasar las de baja frecuencia (en torno a ω_0). En el curso de circuitos eléctricos se estudia en mayor detalle este sistema.

Ejercicios de implementación

1. Considere la función $f(t) = \sum_{n=1}^{N} cos(2\pi \cdot n \cdot t)$.

   a) **[1 punto]** Grafique la función para cuatro valores de N: 5, 10, 50 y 100. Los gráficos deben estar incluidos en una misma figura, como se puede ver a continuación. Más aún, los gráficos deben estár entre $0s$ y $10s$.

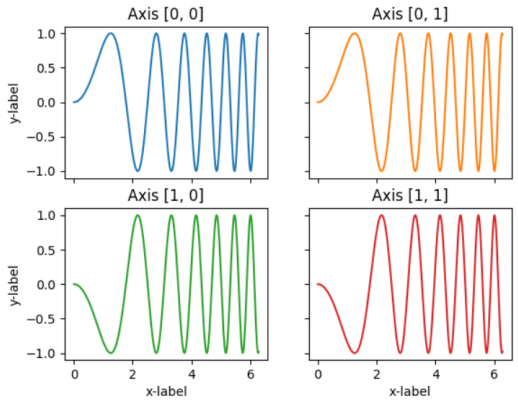


Figura 5: Cuatro gráficos en una misma figura.

HINT: Para generar el vector de tiempo, les recomiendo repetir el procedimiento realizado en el taller de Python.

b) **[1 punto]** ¿A qué función se aproxima $f(t)$ a medida que aumenta n?

Solución:

a) A continuación se puede ver $f(t)$ de $t = 0s$ a $t = 10s$ para distintos valores de n.

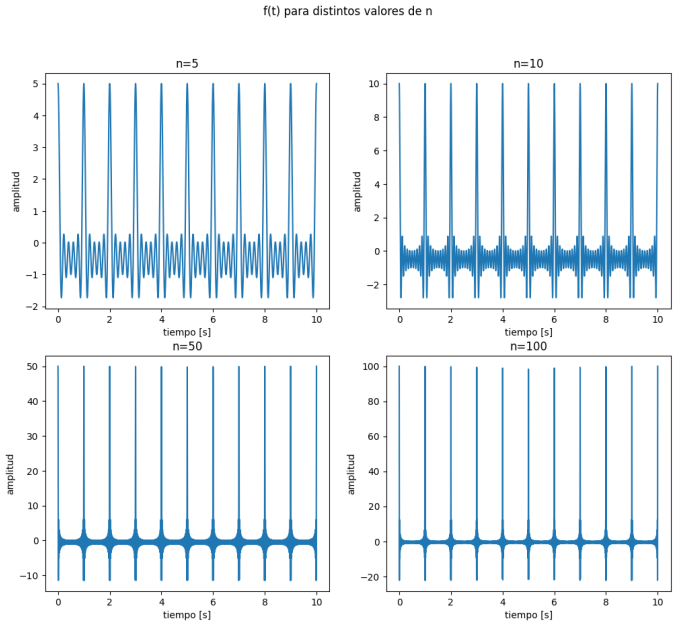


Figura 6: f(t) para distintos valores de n

Asignación de puntaje:

- 0.25 pts: Los gráficos están correctos pero no se incluyen en una misma figura.
- 0.5 pts: Los gráficos están correctos (dependiendo de la frecuencia de muestro algunos peaks pueden estar un poco más arriba que otros), pero no se incluyen los ejes con sus unidades.
- 0.75 pts: No queda claro a que n corresponde cada figura. El resto de los elementos están correctos.
- 1 pto: Los gráficos son correctos, queda claro a qué n corresponde cada gráfico, y se incluyen los ejes con sus unidades.

b) Notamos que a medida que aumenta n, $f(t)$ empieza a tender a cero para t que no son enteros. Por otro lado, para $t \in Z$ la función empieza a tender a ∞. En otras palabras, $f(t)$ se aproxima a un shah a medida que aumenta n.

Asignación de puntaje:

- 0.5 pts: Se identifica correctamente la tendencia de $f(t)$ a medida que crece n.
- 1 pto: Se identifica correctamente la tendencia de $f(t)$ a medida que crece n y se concluye que se está aproximando a un shah.

2. *a*) **[1 punto]** Importe un archivo de audio a su elección y grafíquelo usando matplotlib.

   b) **[1 punto]** Utilice la función Audio de IPython para reproducir el audio con tres frecuencias de muestreo diferentes (una de estas debe ser la original). Comente lo que ocurre al variar este parámetro.

   Comentario: Para evaluar este inciso punto se revisará su código de Python.

Solución:

a) En este caso se importó el archivo *oboe-A4.wav* y se obtuvo el siguiente gráfico:

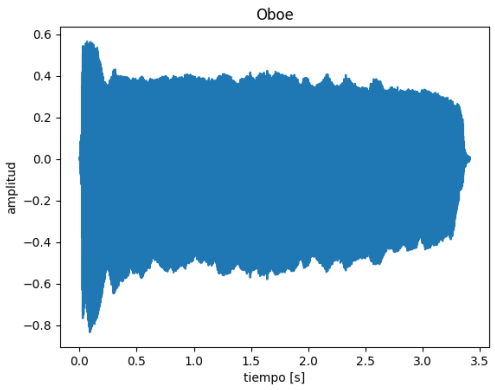


Figura 7: Gráfico de un audio

Asignación de puntaje:

- 0.5 pts: El gráfico es correcto, pero no el eje x está en número de muestras y no en tiempo.
- 0.75 pts: El gráfico es correcto, pero si bien el eje x está en segundos, no se incluye una etiqueta con las unidades y nombre del eje.
- 1 pto: El gráfico es correcto, los ejes están bien etiquetados e incluyen las unidades apropiadas.

b) Para ver una posible solución, puede correr el código de pauta. Cuando variamos la frecuencia de muestreo el sonido se reproduce a una velocidad distinta. Esto cambia el tono de los sonidos y eventualmente puede generar distorsiones dependiendo del audio y la frecuencia de muestro elegida. Si bajamos la frecuencia de muestreo, el audio va a sonar más grave. Por otro lado, si subimos la frecuencia de muestro, el audio suena más agudo.

Asignación de puntaje:

- 0.5 pts: Los audios cumplen con los requisitos del enunciado, pero no se comenta el efecto de cambiar la frecuencia de muestreo.
- 1 pto: Los audios cumplen con los requisitos del enunciado y se comenta correctamente el efecto de cambiar la frecuencia de muestreo.

3. [**2 puntos**] Considere la función vista en clases:

$$f(x) = \left(3 \cdot Gauss\left(\frac{x}{3}\right) - \sqcap\left(x - \frac{3}{2}\right) - \sqcap\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) \cdot ramp\,(x+3)$$

Grafique la función para $x \in [-6, 6]$.

Solución: $f(x)$ debería tener el siguiente gráfico para el dominio señalado:

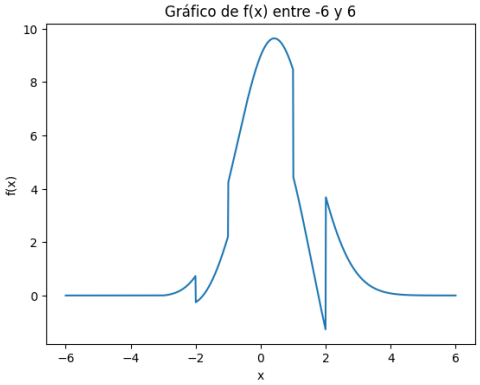


Figura 8: f(x)

Asignación de puntaje: Descontar puntos si no se incluyen los ejes o si el eje x no va de -6 a 6. También se puede otorgar 0.5 pts si el gráfico se parece un poco a la respuesta correcta.

4. **[2 puntos]** Utilice el siguiente documento como referencia para graficar la función $f(x) = e^{i2\pi x}$. Su resultado debería asemejarse a la figura 1.16 del libro guía.

   Solución: $f(x)$ debería tener el siguiente gráfico:

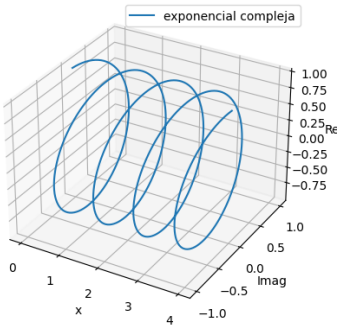


Figura 9: Exponencial compleja

Asignación de puntaje: Descontar puntos si no se incluyen los ejes o si la frecuencia es incorrecta (un ciclo por unidad de x). También se puede otorgar 0.5 pts si el gráfico se parece un poco a la respuesta correcta.