Prueba 5

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Encuentre la transformada Z de $f[n] = (n - n^2)a^n \sqcap[n]$.

   Resultado: Esta transformada se puede econtrar recordando la propiedad de la diferenciación

   $$nf[n] \longrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$$

   y el par conocido

   $$a^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

   Se tiene

   $$na^n \sqcap[n] \longrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$$

   y

   $$n^2a^n \sqcap[n] \longrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}\right) = \frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3} \quad |z| > |a|$$

   y por lo tanto

   $$(n - n^2)a^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} - \frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3} = \frac{-2a^2z^{-2}}{(1 - az^{-1})^3} \quad |z| > |a|$$

2. [6 ptos] Se tiene una función discreta cuya transformada Z es $F(z)$ que tiene los polos en

   $$z_n = 2e^{i2\pi n/N} \text{ con } n = 0...N/2$$

   (a) ¿Dónde están ubicados los polos de otra función cuya transformada Z es $F(z^2)$?

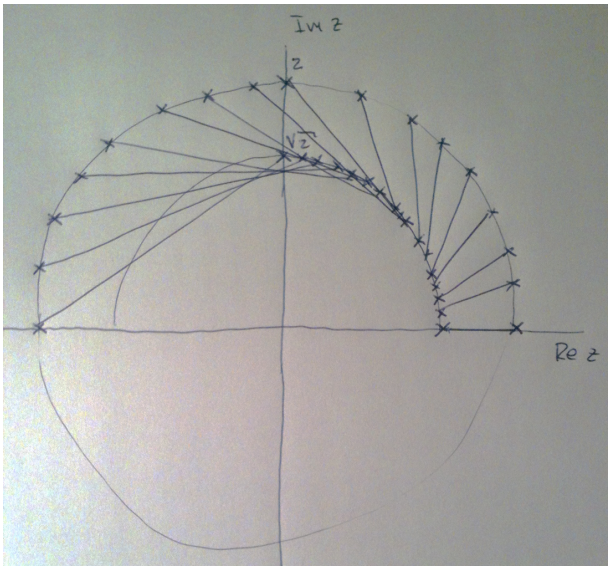
   (b) Grafique los polos de $F(z)$ y los de $F(z^2)$ unidos por una línea recta que indique la correspondencia entre ellos.

   Resultado:

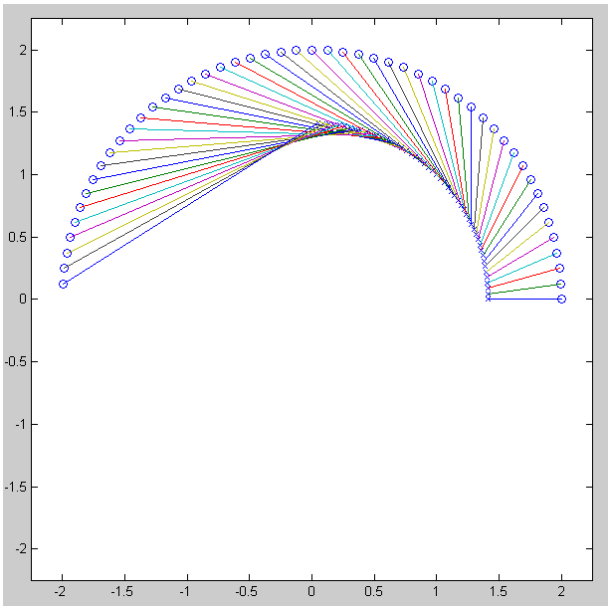
   (a) Los polos de $F(z^2)$ estarán en $\sqrt{z_n}$, es decir en

   $$\sqrt{2}e^{i\pi n/N} \text{ con } n = 0...N/2$$

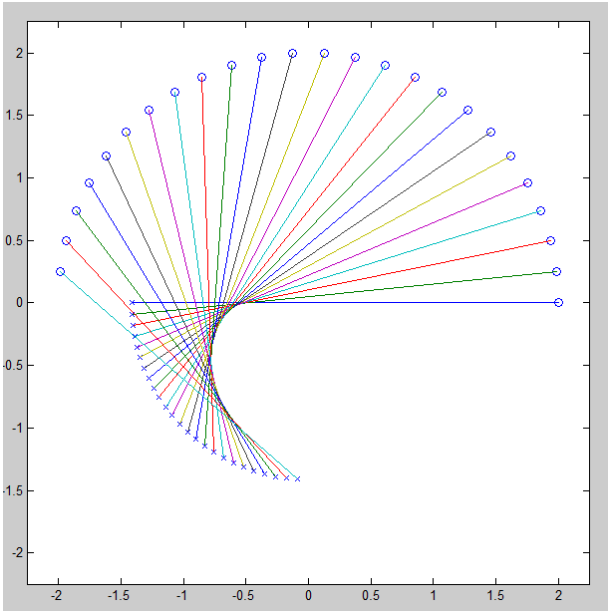
   (b) Los primeros polos estarán en la semi-circunferencia de radio 2 y los segundos en un cuarto de circunferencia de radio $\sqrt{2}$. También hay polos en $-\sqrt{2}$, que graficaremos más adelante. Obviamente el número de polos depende del valor de N. El siguiente gráfico tiene 16 polos.



Con Matlab se puede ver la figura con muchos más polos (¡y mejor hecha!)



Los polos en $-\sqrt{2}$ son



3. [6 ptos] Se define la transformada Z unilateral como

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}.$$

Encuentre la propiedad del desplazamiento, es decir, encuentre la transformada Z de $f[n-a]$ en función de $F_1(z)$ con $a \in \mathbb{Z}$.

Resultado: Sea $g[n] = f[n-a]$. Por definición

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} g[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n-a] z^{-n} \\ &= z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} f[n-a] z^{-(n-a)} \end{aligned}$$

Si $a > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
G_1(z) &= z^{-a}\sum_{n=0}^{\infty} f[n-a]z^{-(n-a)} \\
&= z^{-a}\left[\sum_{n=a}^{\infty} f[n-a]z^{-(n-a)} + \sum_{n=0}^{a-1} f[n-a]z^{-(n-a)}\right] \\
&= z^{-a}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-m} + \sum_{n=0}^{a-1} f[n-a]z^{-(n-a)}\right] \\
&= z^{-a}F_1(z) + z^{-a}\sum_{n=0}^{a-1} f[n-a]z^{-(n-a)} \\
&= z^{-a}F_1(z) + z^{-a}\left[f[-a]z^{a} + f[-a+1]z^{a-1} + \cdots + f[-1]z\right] \\
&= z^{-a}F_1(z) + f[-a] + f[-a+1]z^{-1} + \cdots + f[-1]z^{1-a}
\end{aligned}$$

Por ejemplo, el caso particular $a = 1$ corresponde a

$$f[n-1] \longrightarrow z^{-1}F_1(z) + f[-1]$$

Si $a < 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
G_1(z) &= z^{-a}\sum_{n=0}^{\infty} f[n-a]z^{-(n-a)} \\
&= z^{-a}\left[\sum_{n=a}^{\infty} f[n-a]z^{-(n-a)} - \sum_{n=a}^{-1} f[n-a]z^{-(n-a)}\right] \\
&= z^{-a}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-m} - \sum_{n=a}^{-1} f[n-a]z^{-(n-a)}\right] \\
&= z^{-a}F_1(z) - z^{-a}\sum_{n=a}^{-1} f[n-a]z^{-(n-a)} \\
&= z^{-a}F_1(z) - z^{-a}\left[f[0] + f[1]z^{-1} + \cdots + f[-1-a]z^{a+1}\right] \\
&= z^{-a}F_1(z) - f[0]z^{-a} + f[1]z^{-a-1} + \cdots + f[-1-a]z
\end{aligned}$$

Por ejemplo, el caso particular $a = -1$ corresponde a

$$f[n+1] \longrightarrow zF_1(z) + f[0]z$$

Obviamente, para $a = 0$, $G_1(z) = F_1(z)$.

4. [6 ptos] Las ecuaciones de estado que describen un sistema lineal continuo de entrada $f(t)$ y salida $g(t)$ son

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}f(t) \\
g(t) &= \mathbf{c}\mathbf{v}(t)
\end{aligned}$$

Y su solución, considerando un estado inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o$, es

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}_o + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau.$$

Encuentre las matrices y vectores que describen un sistema discreto equivalente, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n+1] &= \mathbf{A}_d\mathbf{v}[n] + \mathbf{b}_d f[n] \\ g[n] &= \mathbf{c}_d\mathbf{v}[n] \end{aligned}$$

en función de las matrices y vectores continuos. Suponga que se usa un muestreo tipo ZOH (Zero Order Hold) para la entrada, es decir, $f(t)$ se mantiene constante en $f(nT)$ para $nT \le t < (n+1)T$ donde T es el periodo de muestreo, y la salida se muestrea con $g[n] = g(nT)$.

Resultado: De $g[n] = g(nT)$ se tiene que el estado está muestreado de la misma manera, es decir $\mathbf{v}[n] = \mathbf{v}(nT)$. Aplicando la solución continua, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n] &= \mathbf{v}(nT) \\ &= e^{\mathbf{A}nT}\mathbf{v}_o + \int_0^{nT} e^{\mathbf{A}(nT-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n+1] &= e^{\mathbf{A}(n+1)T}\mathbf{v}_o + \int_0^{(n+1)T} e^{\mathbf{A}((n+1)T-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T}e^{\mathbf{A}nT}\mathbf{v}_o + \int_0^{nT} e^{\mathbf{A}((n+1)T-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{\mathbf{A}((n+1)T-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T}e^{\mathbf{A}nT}\mathbf{v}_o + e^{\mathbf{A}T}\int_0^{nT} e^{\mathbf{A}(nT-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{\mathbf{A}((n+1)T-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T}\left(e^{\mathbf{A}nT}\mathbf{v}_o + \int_0^{nT} e^{\mathbf{A}(nT-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau\right) + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{\mathbf{A}((n+1)T-\tau)}\mathbf{b}f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Pero el término en paréntesis es $\mathbf{v}[n]$ y la última integral se simplifica dado que $f(\tau) = f(nT) = f[n]$ dado que $nT \le \tau < (n+1)T$

$$\mathbf{v}[n+1] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{v}[n] + \left(\int_{nT}^{(n+1)T} e^{\mathbf{A}((n+1)T-\tau)}d\tau\right)\mathbf{b}f[n]$$

Haciendo $\xi = \tau - nT$, la integral es

$$\begin{aligned} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{\mathbf{A}((n+1)T-\tau)}d\tau &= \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\xi)}d\xi \\ &= -\mathbf{A}^{-1}\, e^{\mathbf{A}(T-\xi)}\Big|_0^T \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}T}) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathbf{v}[n+1] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{v}[n] + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}T})\mathbf{b}f[n]$$

De donde se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{b}_d &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}T})\mathbf{b} \\ \mathbf{c}_d &= \mathbf{c} \end{aligned}$$