Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Pauta Ayudantía 0

10 de Marzo 2023

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl

Crédito a Ayudantías 2022-2, 2016-2

Repaso de Conceptos

Números complejos

- La unidad imaginaria i es aquel número que satisface la ecuación:

$$x^2 = -1$$

Tal que:

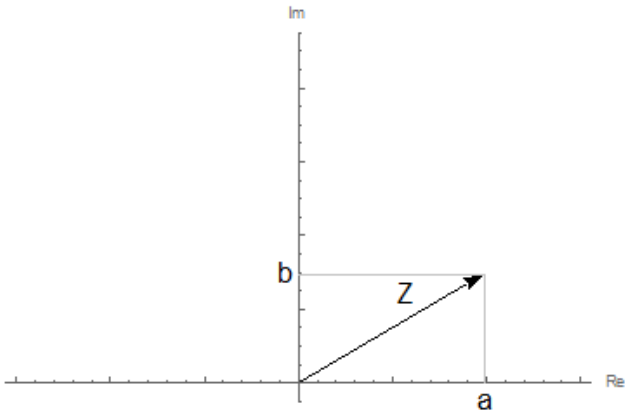
$$x = \pm i$$

- Los números complejos son de la forma:

$$Z = a + bi$$

Donde:

- a corresponde a la **parte real** de Z
- b corresponde a la **parte imaginaria** de Z
- El módulo de Z es $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- La representación en el plano complejo es de la forma:



- El ángulo α de inclinación de Z respecto al eje x es:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- La fórmula de Euler indica:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

A partir de ella se pueden escribir las funciones trigonométricas seno y coseno en forma exponencial:

$$\sin(x) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos(x) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Funciones

La expresión $f(x) = y$ significa que tomo un número x del conjunto de salida y lo transformo en un número y del conjunto de llegada mediante una relación f. Hay una relación entre un dominio y un recorrido en donde todos los elementos del conjunto de salida tienen asignado un único elemento en el conjunto de llegada.

Continuidad

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un punto a si se cumple que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Simetrías

La comprensión de las simetrías es una herramienta que será de alta utilidad más adelante en el curso. Las simetrías más importantes son:

- Función par:

  Una función es par cuando para todos los puntos de su dominio se cumple que:

$$f(x) = f(-x)$$

- Función impar:
  Una función es impar cuando para todos los puntos de su dominio se cumple que:

$$f(x) = -f(-x)$$

- Función hermitiana:

  Una función compleja es hermitiana si tiene:

  - Parte real par
  - Parte imaginaria impar

- Función anti-hermitiana:

  Una función compleja es anti-hermitiana si tiene:

  - Parte real impar
  - Parte imaginaria par

- Toda función se puede escribir como la suma de una parte par y una parte impar:

$$\text{par}\{f(x)\} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{impar}\{f(x)\} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Sumas

Suma aritmética

Una progresión aritmética se define como:

$$a_n = \begin{cases} b & si \quad n = 1 \\ \\ a_{n-1} + d & si \quad n > 1 \end{cases}$$

Donde d es una constante que corresponde a la diferencia entre dos términos sucesivos.
La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Suma geométrica

Una suma geométrica corresponde a la suma de n términos seguidos que tienen una razón constante entre términos. El valor de la suma de los primeros n términos es:

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Si ahora consideramos un r tal que $|\mathbf{r}| < \mathbf{1}$ podemos calcular la suma infinita de los términos de la progresión geométrica, tal que:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}}$$

Integrales

Es muy importante saber integrar y saber las propiedades de la integral como operador.
La integral indefinida:

$$\int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x) + c$$

Nos indica que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x)$$

El teorema fundamental del cálculo indica:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = F(b) - F(a)$$

Cuando los extremos tienden a infinito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

La integral es un operador lineal, esto significa que:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ \mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b \alpha g(x)$$

No podemos olvidar la integración por partes:

$$\boxed{\int u\ dv = uv - \int v\ du}$$

Señales

Definición: Son transmisores de información que se pueden tratar matemáticamente como funciones de una variable independiente, la forma en que la función evoluciona en la medida que cambia la variable independiente contiene la información. Pueden ser modificadas por un sistema.

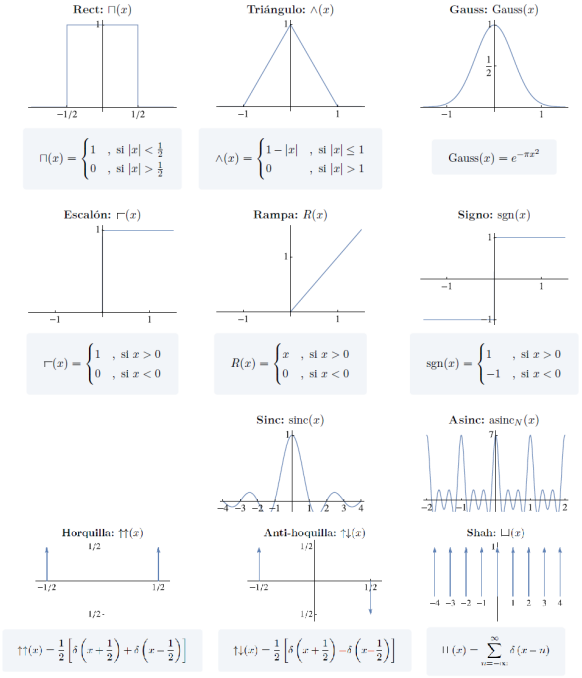
Clasificación según la naturaleza de la variable independiente:

- **Señales Continuas:** son aquellas que toman un valor para todos los valores de la variable independiente.
- **Señales Discretas:** son aquellas que solo toman valores para algunos puntos de la variable independiente.
- **Señales Digitales:** corresponden a las señales que toman valores acotados y solo para algunos valores de la variable independiente.

Observación: una señal continua puede ser presentada matemáticamente por una función discontinua.

Señales importantes:

Hay un grupo particular de funciones que nos interesarán para el modelamiento de señales.



Sistemas

Definición: Son mecanismos que transforman señales.

Tipos de sistemas:

- **Causales:** Son aquellos en que la salida solo depende del estado actual y de estados pasados.
- **Invariantes:** L(f(x+a)) = g(x+a)

- **Linealidad:** un sistema $L\{x(t)\}$ es lienal cuando cumple homogeneidad y superposición.
  1. $L\{x(t)\}$ es homogeneo si $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  2. $L\{x(t)\}$ cumple con superposición si $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$
- **LTI:** lineales e invariantes.
- **Con memoria:** requieren estados pasados.
- **Estables:** a entradas acotadas entregan salidas acotadas.
- **Invertibles:** si un sistema tiene un sistema inverso con el que al conectarse en serie la salida da la entrada, es invertible.

Ejercicios

1. Determine la parte real y parte imaginaria de los siguientes números:

   a) $\ln(-1)$
   Podemos escribir esta expresión como $e^b = -1$ y por identidad de Euler sabemos que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ de esta forma buscamos un valor de θ que nos elimine la parte imaginaria y la parte real sea -1. Los número que cumplen con esto son todos los múltiples enteros impares de π de tal forma que si $\theta = (2k+1)\pi$ tenemos que $\cos\theta + i\sin\theta = -1 = e^b$. Por lo tanto $\ln(-1) = i(2k+1)\pi$

   b) $\sqrt{i}$
   Sabemos que podemos expresar $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. De esta manera escribimos $i^{\frac{1}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Escriba, usando la identidad de Euler, seno y coseno en término de exponenciales complejas:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - \sin x$$

   Teniendo estas dos expresiones podemos trivialmente sumarlas o restarlas para llegar a:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

3. Tenemos las función $f(x) = x^3$, grafique:

   a) $f(2x)$ y $f(x/2)$

b) $f(-(x-3))$

c) $3 + f(2(x-3))$

```
In[25]:= f[x_] := x^3
         f1[x_] := f[2*x]
         f2[x_] := f[x/2]
         f3[x_] := f[-(x-3)]
         f4[x_] := 3 + f[2*(x-3)]
         Plot[{f[x], f1[x], f2[x], f3[x], f4[x]}, {x, -5, 10}, PlotLabels → {"f", "f1", "f2", "f3", "f4"}]
```

[representación gráfica] [etiquetas de representación]

Out[30]=

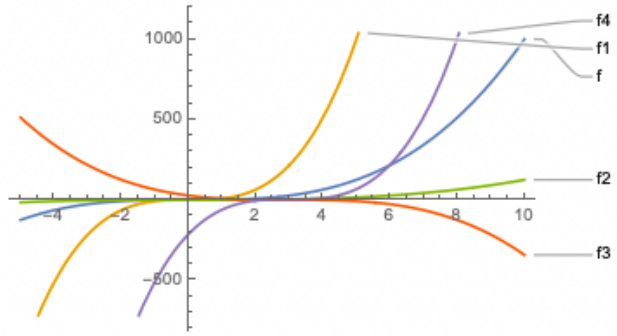


Figura 1: Pregunta 3

4. Calcular el valor numérico de:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

Para resolver esto es necesario notar que al tomar valor absoluto estamos tomando dos veces la suma de cero a infinito, es decir:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} = -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Podemos observar que la expresión de la derecha es una serie geométrica que converge porque $|r| < 1$, luego, se puede sustituir en la fórmula:

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 - 1 = 3$$

Finalmente se obtiene que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} = 3$$

5. Suponga $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x...}}}}$ encuentre el valor numérico de:

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{dx}$$

Para solucionar esto, comenzamos re escribiendo f(x) como multiplicación de potencias:

$$f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x...}}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot ...$$

Observemos que esto corresponde matemáticamente a:

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot ... = \prod_{n=2}^{\infty} x^{\frac{1}{n!}}$$

Observando que tenermos una multiplicación de potencias con igual base, usando propiedades de las potencias, el resultado de la multiplicación es la base elevado a la suma de los ecponenetes, tal que:

$$f(x) = \prod_{n=2}^{\infty} x^{\frac{1}{n!}} = x^{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

Para expresar $f(x)$ de tal forma que sea posible integrarla, resolvemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Podemos observar que esto es muy similar a la serie de Taylor de e^x si $x = 1$, observemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Entonces la expresión a resolver, sumando y restando los términos convenientes es:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{0!} = e - 2$$

Entonces la función $f(x)$ es:

$$f(x) = x^{e-2}$$

Entonces, es posible integrarla como a una potencia, su antiderivada más general es:

$$\int x^{e-2}\ \mathrm{dx} = \frac{x^{e-1}}{x^{e-1}}$$

Luego, usando teorema fundamental del cálculo tendremos:

$$\int_0^1 x^{e-2} = \frac{1^{e-1}}{e-1} - \frac{0^{e-1}}{e-1}$$

Finalmente se obtiene que:

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{e-1}$$

6. Encuentre el producto interno entre las funciones $f(x) = e^{-2x}$ y $g(x) = u(x)$ donde u es escalón de x. **El producto interno lo definimos :**

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx$$

Por lo tanto: $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}u(x)\,dx$ **Dado que la función escalón es cero para negativo y uno para positivos esta integral se puede expresar como:**

$$\int_0^{\infty} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}$$

7. Señales importantes:

   a) Escriba $\sqcap(x)$ en términos de la función escalón:
   La manera más fácil de comprender esto es gráficamente, se puede entender como un ecalón que pasa de cero a 1 en $\frac{-1}{2}$ y luego un escalón que pasa de cero a -1 en $\frac{1}{2}$. Al sumar estos dos escalones queda solamente los valores entre -1/2 y 1/2.

$$\sqcap(x) = u_{\frac{-1}{2}} - u_{\frac{1}{2}}$$

   b) Calcule la dervidad de $u(x)$ y de $\sqcap(x)$.
   La manera más sencilla de enteder las derivadas es cualitativamente. Sabemos que la pendiente del escalón es cero en todos los intantes y luego es infinita en cero (ya que el escalón sube verticalmente de cero a uno). Es decir buscamos una función que sea cero para todo valor y sea infita en cero, es decir un delta de Dirac, por lo tanto:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \delta(x)$$

De manera muy similar podemos entender la derivada del $\sqcap(x)$ como una pendiente inifita en -1/2 y una que va a -infinito en 1/2. Esto se puede expresar como delta de Dirca tal que:

$$\frac{\partial \sqcap(x)}{\partial x} = \delta_{-1/2} - \delta_{1/2}$$

8. Determinar si los siguientes sistemas con entrada f(x) y salida g(x) son LTI:

   a) $g(x) = \cos(2\pi) f(x)$

   Comenzamos probando linealidad:

   - Homogeneidad: $\alpha L\{f(x)\} = L\{\alpha f(x)\}$
     Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

     $$\alpha L\{f(x)\} = \alpha \cos(2\pi) f(x)$$

     Luego, desarrollamos el lado derecho:

     $$L\{\alpha f(x)\} = \alpha \cos(2\pi) f(x)$$

     Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.
   - Superposición: $L\{f(x) + m(x)\} = L\{f(x)\} + L\{m(x)\}$
     Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

     $$L\{f(x) + m(x)\} = \cos(2\pi)[f(x) + m(x)] = f(x)\cos(2\pi) + m(x)\cos(2\pi)$$

     Luego, desarrollamos el lado derecho:

     $$L\{f(x)\} + L\{m(x)\} = f(x)\cos(2\pi) + m(x)\cos(2\pi)$$

     Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**. Entonces **el sistema es lineal.**

   A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x-\alpha)\} = g(x-\alpha)$
   Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

   $$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow f(x-a)\cos(2\pi)$$

   Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

   $$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow f(t)\cos(2\pi) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a)\cos(2\pi)$$

   Dado que la señal de salida es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es invariante**

b) $g(x) = 6xf(x)$ Comenzamos probando linealidad:

- Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$\alpha L\{f(t)\} = \alpha 6xf(x)$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{\alpha f(t)\} = \alpha 6xf(t)$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.
- Superposición: $L\{f(x) + m(x)\} = L\{f(x)\} + L\{m(x)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$L\{f(x) + m(x)\} = 6x[f(x) + m(x)]$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{f(x)\} + L\{m(x)\} = 6xf(x) + 6xm(x) = 6x[f(x) + m(x)]$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**. Entonces **el sistema es lineal.**

A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x - \alpha)\} = g(x - \alpha)$
Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow f(x-a)6x$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow f(x)6x \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow 6f(x-a)(x-a)$$

Dado que la señal de salida no es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es variante**

c) $g(x) = cos(x)f(x)$ Comenzamos probando linealidad:

- Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$\alpha L\{f(t)\} = \alpha \cos(x)f(x)$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{\alpha f(t)\} = \alpha \cos(x)f(x)$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.

- Superposición: $L\{f(x) + m(x)\} = L\{f(x)\} + L\{m(x)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$L\{f(x) + m(x)\} = \cos(x)[f(x) + m(x)]$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{f(x)\} + L\{m(x)\} = \cos(x)f(x) + \cos(x)m(x) = \cos(x)[f(x) + m(x)]$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**. Entonces **el sistema es lineal.**

A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x - \alpha)\} = g(x - \alpha)$
Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow f(x-a)\cos(x)$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow f(x)\cos(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a)\cos(x-a)$$

Dado que la señal de salida no es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es variante**