Interrogación 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (6 pts.) **DFT.** Pedrito tiene su función periódica y discreta preferida $\tilde{f}[n]$, de largo N. Sin querer, jugando con ella, se da cuenta que su función cumple lo siguiente:

$$\tilde{f}[n]\frac{1}{2}\text{Ш}[n/2] - \tilde{f}[n]\frac{1}{2}\text{Ш}[(n-1)/2] \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{F}[k-N/2]$$

   (a) (1 pts.) Reescriba de una manera más amigable la propiedad que cumple la función de Pedrito.

   (b) (1 pts.) ¿Será cierto que esto se cumple para toda función $\tilde{f}[n]$?

   (c) (2 pts.) La función de Pedrito resultó ser $\tilde{f}[n] = \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿Cuál es el valor de $\tilde{F}[k-N/2]$?

   (d) (2 pts.) ¿Influye la posición del $n=0$ en $\tilde{f}[n]$ al calcular $\left|\tilde{F}[k-N/2]\right|$? ¿Qué conclusión puede sacar con respecto al módulo de la DFT?

Solución:

(a) La propiedad de Pedrito puede reescribirse como:

$$(-1)^n\,\tilde{f}[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{F}[k-N/2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Claramente esta propiedad se cumple para todas las funciones, si reescribimos $e^{i2\pi(N/2)n/N} = (-1)^n$ notamos que esta propiedad es simplemente un desplazamiento en frecuencia:

$$e^{i2\pi(N/2)n/N}\,\tilde{f}[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{F}[k-N/2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Será más fácil realizar esta operación con la matriz W:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots \\ 1 & -i & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & \cdots & \cdots \\ 1 & -i & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

El resultado de la DFT será entonces:

$$\boxed{\tilde{F}[k] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \underline{0} & 1+i & 0 & 1-i \end{pmatrix}}$$

Es decir,

$$\boxed{\tilde{F}[k-N/2] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \underline{0} & 1-i & 0 & 1+i \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(d) Un cambio en la posición del cero en la función puede ser interpretada como un desplazamiento en el tiempo, así:

$$\begin{aligned} \tilde{f}\,[n-a] &\overset{\text{DFT}}{\longrightarrow} \tilde{F}\,[k]\,e^{-i2\pi ka/N} \\ (-1)^n\,\tilde{f}\,[n-a] &\overset{\text{DFT}}{\longrightarrow} \tilde{F}\,[k-N/2]\,e^{-i2\pi(k-N/2)a/N} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Luego el módulo de la transformada de Fourier será siempre $\left|\tilde{F}\,[k-N/2]\right|$ sin importar el desplazamiento, dicho de otro modo podemos concluir que el **módulo de la transformada de Fourier es invariante a desplazamientos** $\rightarrow$ **1 pts.**

2. (4 pts.) **DTFT.** Sea la transformada de tiempo discreto de Fourier de una señal $f[n]$:

$$\tilde{F}(u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\cos(2\pi n u)$$

Grafique la función $f[n]$ y encuentre su representación explícita.

Solución:

Por dualidad tendremos que aplicando la FT de $\tilde{F}(u)$ obtendremos $f[-n]$, sin embargo la función resultante es par, de lo que se concluye inmediatamente que:

$$f[n] = \delta[n] + \sum_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)(\delta[n+k] + \delta[n-k]) = \mathcal{F}\left\{\tilde{F}(u)\right\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Gráficamente esto es igual a: $\rightarrow$ **1 pts.**

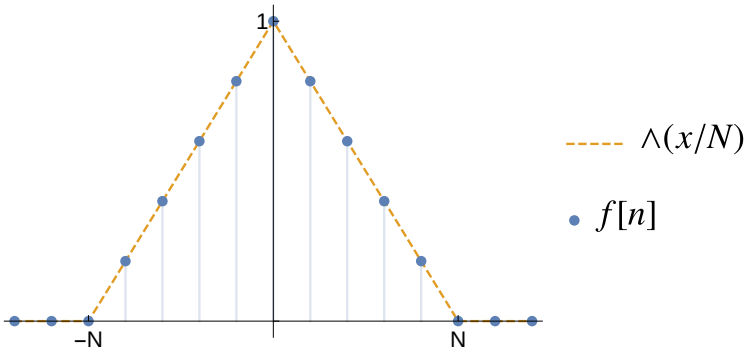


Figure 1: Representación gráfica.

Luego podemos darnos cuenta que:

$$\boxed{f[n] = \wedge\left[\frac{n}{N}\right]} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

3. (4 pts.) **Transformada de uno.** Demuestre sin utilizar la propiedad de dualidad ni la transformada inversa de Fourier que:

$$1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(u)$$

Solución:

Por definición se tendrá:

$$\mathcal{F}\{1\} = \lim_{a\to\infty} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi ux} \mathrm{d}x \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Luego, la parte impar de la exponencial compleja puede ser obviada y resolvemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{1\} &= \lim_{a\to\infty} \int_{-a/2}^{a/2} \cos(2\pi ux)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{\sin(2\pi ux)}{2\pi u}\Bigg|_{-a/2}^{a/2} \\ &= \lim_{a\to\infty} a \cdot \mathrm{sinc}(au) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Este límite tenderá a la función impulso a medida que a crece: $\rightarrow$ **1 pts.**

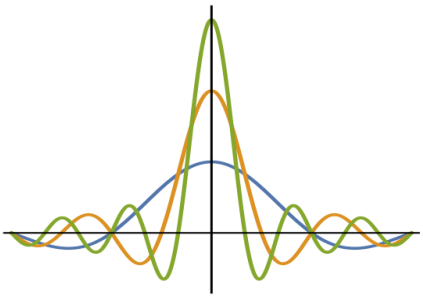


Figure 2: $\lim_{a\to\infty} a \cdot \mathrm{sinc}(au)$

Es decir,

$$\boxed{1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(u)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

4. (8 pts.) **Modulación FM.** Un mensaje $m(t)$ es enviado por un canal de comunicación con características tales que se ha decidido enviarlo modulado en FM (por sus siglas en inglés *frequency modulation*). Es decir, se tiene una nueva señal $s(t)$ definida como:

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Con A_c la amplitud de la onda portadora, f_c su frecuencia y k_f es la sensibilidad en frecuencia, todas constantes.

(a) (1 pts.) Encuentre $s(t)$ para un tono puro $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ y simplifique la expresión en términos de las constantes anteriores y $\beta = k_f A_m / f_m$.

(b) (2 pts.) Escriba $s(t)$ utilizando la representación compleja del coseno para el caso anterior.

(c) (4 pts.) Calcule la serie de Fourier de $f(t) = e^{i\beta \sin(2\pi f_m t)}$ y escríbala en términos de las funciones de Bessel:

$$J_k(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\beta \sin x - kx)\,\mathrm{d}x$$

Luego, reescriba $s(t)$ en término de ellas de la manera más simplificada posible.
Hint: Si $x(t)$ es par e $y(t)$ es impar, $x(y(t))$ será par e $y(y(t))$ impar.

(d) (1 pts.) Calcule el espectro de la modulación FM del tono puro.

Solución:

(a) La señal resultante para un tono puro es (reemplazando por la constante β):

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Sin embargo una manera más conveniente será:

$$s(t) = \frac{A_c}{2}\left(e^{i2\pi f_c t} f(t) + e^{-i2\pi f_c t} f(-t)\right) \quad \text{con} \quad f(t) = e^{i\beta \sin(2\pi f_m t)} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) Por definición los coeficientes de la serie de Fourier compleja de $f(t)$ serán:

$$C_k = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} e^{i\beta \sin(2\pi f_m t) - i2\pi k f_m t}\mathrm{d}t \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Expandiendo la exponencial usando la identidad de Euler y usando el hint quedará:

$$C_k = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \cos(\beta \sin(2\pi f_m t) - 2\pi k f_m t)\,\mathrm{d}t \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Haciendo un cambio de variable $x = 2\pi f_m t$ se tendrá que:

$$\boxed{C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\beta \sin(x) - kx)\,\mathrm{d}x = J_k(\beta)}$$

Luego la señal puede escribirse como:

$$s(t) = \frac{A_c}{2}\left(e^{i2\pi f_c t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\, e^{i2\pi k f_m t} + e^{-i2\pi f_c t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\, e^{-i2\pi k f_m t}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Que es igual a:

$$\boxed{s(t) = A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_c + k f_m\right)t\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(d) Ahora será fácil calcular que el espectro de dicha señal será, reemplazando $\omega_k = 2\pi\left(f_c + k f_m\right)$:

$$\boxed{S(u) = A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\,\frac{\pi}{\omega_k} \uparrow\uparrow \left(\frac{\pi}{\omega_k}u\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

5. (4 pts.) **Energía.** Sea $f(t)$ una señal periódica continua. Suponga que esta señal tiene una representación en Series de Fourier de la forma

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} e^{ik(\pi/4)t}$$

donde α es un numero real entre 0 y 1. Si esta señal es la entrada a un sistema LTI cuya respuesta de frecuencia es

$$H(i\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

determine el valor que debe tener W para que la salida del sistema tenga al menos el 90% de la energía promedio por período de $f(t)$.

Solución:

La energía promedio por período, se puede calcular por el Teorema de Parseval, es decir

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_k |a_k|^2 = \sum_k \alpha^{2|k|} = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

El sistema básicamente consiste en un filtro pasabajos, consistente en un rect en frecuencia de largo N. Se requiere encontrar el valor de este N tal que

$$\sum_{-N+1}^{N-1} |a_k|^2 = 0.9 \times \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Resolviendo la serie parcial se obtiene la siguiente relación

$$\frac{1-2\alpha^{2N}+\alpha^2}{1-\alpha^2} = 0.9 \times \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

obteniendo el valor para N

$$N = \frac{\log[0.05\alpha^2 + 0.05]}{2\log\alpha} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Entonces, considerando el período fundamental de la secuencia $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, los límites para W son

$$\boxed{\frac{(N-1)\pi}{4} < W < \frac{N\pi}{4}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

6. (6 pts.) **Planetas.** A finales del siglo II a.C el movimiento planetario dejó de ser interpretado como movimientos circulares, si no como movimientos circulares simultáneos con dos círculos de radios R_n y frecuencia angular de giro ω_n, a esto se le llamó **epiciclo**:

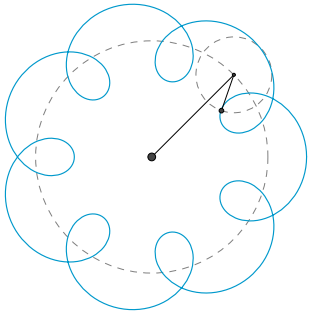


Figure 3: "Movimiento planetario" en el siglo II a.C.

(a) (4 pts.) En un universo paralelo se tiene un planeta llamado Fourier 2103a que se mueve en un **astroide**, es decir:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos^3(t), \sin^3(t)\right)$$

¿Cuál es la serie de Fourier compleja $f(t)$ que describe dicha trayectoria en el plano complejo?

(b) (2 pts.) Los griegos se dieron cuenta que la aproximación del movimiento con dos círculos no era lo suficientemente precisa ¿Por qué la idea de agregar más círculos hace sentido para minimizar el error?

Solución:

(a) Primero que todo notamos que en Fourier:

$$\cos^3(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \uparrow\uparrow(u) * \uparrow\uparrow(u) * \uparrow\uparrow(u) \quad \text{y} \quad \sin^3(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -i\left(\uparrow\downarrow(u) * \uparrow\uparrow(u) * \uparrow\uparrow(u)\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Gráficamente esto será:
Luego concluimos que:

$$\uparrow\uparrow(u) * \uparrow\uparrow(u) * \uparrow\uparrow(u) = \frac{3}{4}\uparrow\uparrow(u) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\uparrow\uparrow\left(\frac{u}{3}\right) \quad \text{y} \quad -i\uparrow\downarrow(u) * \uparrow\uparrow(u) * \uparrow\uparrow(u) = \frac{3}{4}i\uparrow\downarrow(u) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}i\uparrow\downarrow\left(\frac{u}{3}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

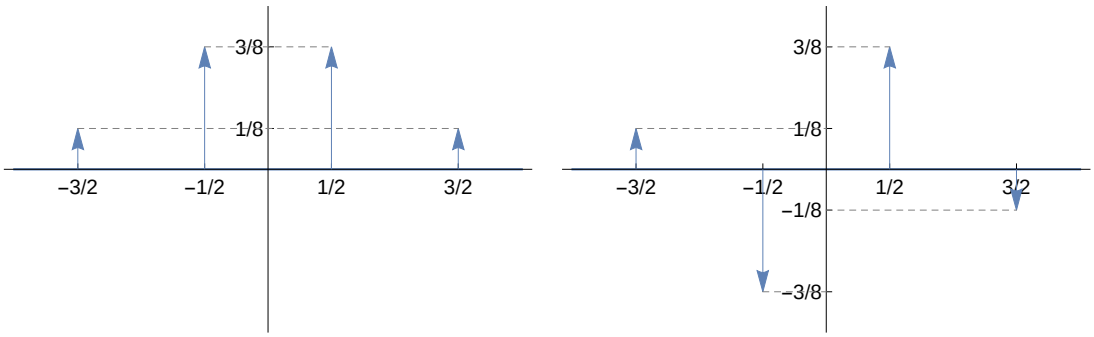
Y por lo tanto se tendrá aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ y relacionando el resultado con $f(t)$:

$$\mathrm{Re}\{f(t)\} = \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t) \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\{f(t)\} = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)$$

Es decir,

$$\boxed{f(t) = \frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4}e^{-i3t}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

La trayectoria del planeta como serie de Fourier se ve representada gráficamente por:



(a) $\uparrow\uparrow (u) *^3$. (b) $\uparrow\downarrow (u) *^3$.

Figure 4: Resultado de convoluciones en frecuencia.

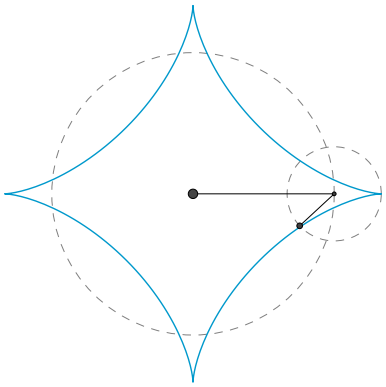


Figure 5: Trayectoria de Fourier 2103a.

(b) **Agregar más círculos es equivalente a agregar más términos en la serie de Fourier**, → **1 pts.** como la trayectoria de los planetas es periódica, esta se verá representada de manera cada vez más precisa por la serie de Fourier y así se **minimiza el error de aproximación**. → **1 pts.**

7. (6 pts.) **Función de transferencia.** Considere la siguiente función de transferencia

$$H(u) = \frac{i2\pi u}{b + i2\pi u}$$

(a) (3 pts.) ¿Cuál es la respuesta al impulso del sistema?

(b) (3 pts.) ¿Cuál es la salida si la entrada es $e^{-at}\sqcap(t)$?

Solución:

- La respuesta al impulso es la transformada inversa de Fourier de la respuesta de frecuencia → **1 pts.** Para encontrar esta transformada, primero notamos que el numerador de la función de transferencia representa una diferenciación de la señal original y podemos utilizar la propiedad de la derivada en este caso. Por lo tanto, podemos concentrarnos en

$$H_2(u) = \frac{1}{b + i2\pi u}$$

Reconocemos esta función como la transformada de

$$h_2(t) = e^{-bt}\sqcap(t)$$

para $b > 0$ → **1 pts.** Utilizando entonces la propiedad de la derivada:

$$h(t) = \frac{d}{dt}\{e^{-bt}\sqcap(t)\} = e^{-bt}\delta(t) - be^{-bt}\sqcap(t) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

- En el dominio de Fourier la salida será

$$Y(u) = \frac{i2\pi u}{b + i2\pi u} \times \frac{1}{a + i2\pi u} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Una forma de resolver esto es mediante expansión en fracciones parciales, por lo tanto buscamos $Y(u)$ de la forma

$$Y(u) = \frac{K_1}{b + i2\pi u} + \frac{K_2}{a + i2\pi u}$$

Resolviendo las fracciones parciales encontramos

$$K_1 = \frac{-a}{b - a}$$

y

$$K_2 = \frac{b}{b - a}$$

por lo que

$$Y(u) = \frac{\frac{-a}{b-a}}{b + i2\pi u} + \frac{\frac{b}{b-a}}{a + i2\pi u} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

por lo que

$$\boxed{y(t) = \frac{-a}{b-a}e^{-bt}\sqcap(t) + \frac{b}{b-a}e^{-at}\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

8. (**BONUS** 4 pts.) **Chirps.** Los *chirp* son un tipo de señal que se caracteriza por representar una frecuencia variable a través del tiempo, en general pueden ser expresados de la forma:

$$x(t) = e^{i2\pi\phi(t)}$$

Donde para ellos se define la frecuencia instantánea como $f(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt}$, es decir, la frecuencia que predomina en la señal para el instante de tiempo t.

(a) (2 pts.) Uno de los chirp utilizados más comúnmente se conoce como el "chirp lineal", el que definiremos como:

$$x(t) = \exp(i\pi a t^2)$$

Determine la transformada de Fourier del chirp lineal y demuestre que su amplitud es constante para todas las frecuencias.

(b) (1 pts.) Explique en términos del concepto de espectro que significaría que la transformada de Fourier del chirp lineal sea constante.

(c) (1 pts.) En el caso del chirp lineal se tiene que la frecuencia instantánea corresponde a la función $f(t) = at$, que es una función lineal. ¿qué esperaría de la amplitud de la transformada de Fourier de un chirp distinto al lineal cuya frecuencia instantánea sea una función no lineal?

Solución:

(a) Considerando el la transformada de Fourier de la función Gauss, $\exp(-\pi t^2) \rightarrow \exp(-\pi u^2)$, más la propiedad del escalamiento, tenemos que la tranformada resultante es:

$$X(u) = \frac{1}{|a|}\exp\left(\frac{i\pi u^2}{a}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Donde se tiene que $|X(u)| = \frac{1}{|a|}$ que es constante $\rightarrow$ **1 pts.**

(b) Si la transformada de Fourier tiene un valor constante a lo largo de todo el espectro, esto significa que la **energía** está **repartida de manera uniforme** para **todas las frecuencias** de esta señal $\rightarrow$ **1 pts.**

(c) En el caso del chirp lineal, la amplitud constante indica que todas las frecuencias disponen de una misma energía, en el caso de un chirp no lineal no podemos garantizar que la amplitud de la transformada de Fourier sea constante, por lo que podemos esperar que un rango de frecuencias dado por los valores que recorre la frecuencia instantánea de dicho chirp tenga amplitud no nula, pero esta amplitud dependerá de la forma del chirp. En general **si un valor de frecuencia es recorrido más rápido por la frecuencia instantánea, esto está asociado a una menor amplitud en el espectro para dicha frecuencia**$\rightarrow$ **1 pts.**