Prueba 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y otros apuntes.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja.
- No se olvide de colocar su nombre en todas las hojas, ¡hágalo ahora!

---

1. [6 ptos] **Interpolación.** La interpolación de muestras discretas para obtener valores intermedios se puede interpretar como una convolución. Convolucionar con $\sqcap(x)$ es obtener el vecino más cercano; con $\wedge(x)$, interpolación lineal; y con $\sqcap(x) * \wedge(x)$ lo llamaremos interpolación cuadrática. Si las muestras originales son $f[0] = f_0 \;\; f[1] = f_1 \;\; f[2] = f_2$ etc.

   Encuentre los valores interpolados con

   a) [1 pto] el vecino más cercano en $x = 1$ y $x = 5/4$.

   b) [1 pto] interpolación lineal en $x = 1$ y $x = 7/4$.

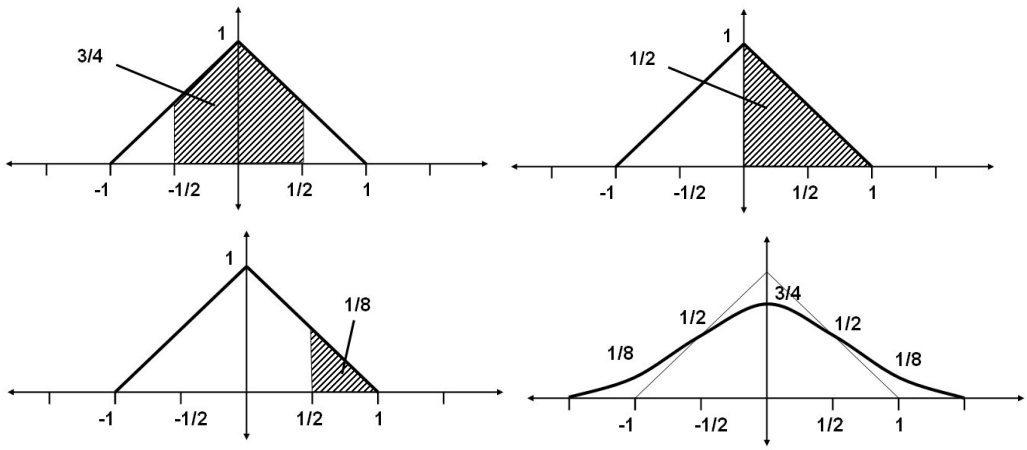
   c) [4 ptos] interpolación cuadrática en $x = 1$ y $x = 6/4$.

   Resultado:

   a) Por simple inspección $f(1) = f_1$ y $f(1,25) = f_1$.

   b) Como es una interpolación lineal $f(1) = f_1$ y $f(1,75) = \frac{1}{4}f_1 + \frac{3}{4}f_2$.

   c) En primer lugar encontremos $g(x) = \sqcap(x) * \wedge(x)$, pero solo en las posiciones que necesitamos: $x = -1, -1/2, 0, 1/2$ y 1. En los gráficos que siguen se calcula esa convolución



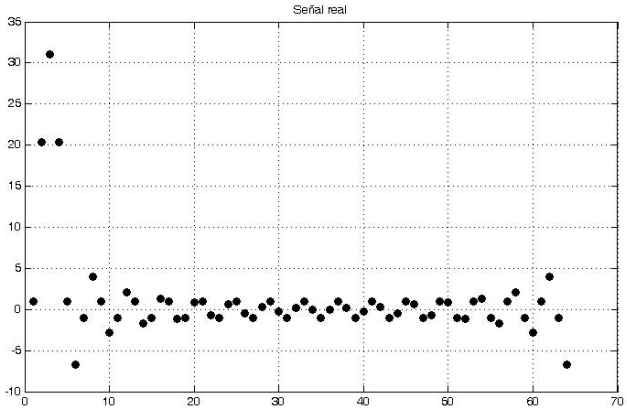
   Por lo que se tiene

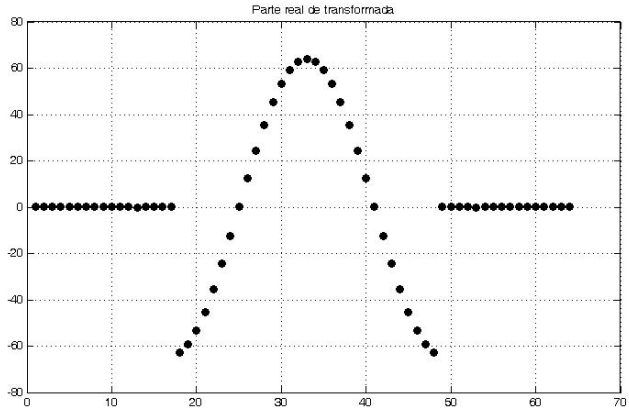
$$f(1) = g(-1)f_0 + g(0)f_1 + g(1)f_2 = \frac{3}{4}f_1 + \frac{1}{8}f_0 + \frac{1}{8}f_2$$

   y

$$f(1,5) = g(1/2)f_1 + g(1/2)f_2 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2.$$

2. [4 ptos] **Medio gráfico.** La primera figura muestra una señal real, `f`, (parte imaginaria igual a cero).





La segunda figura se encontró con los siguientes comandos de Matlab:

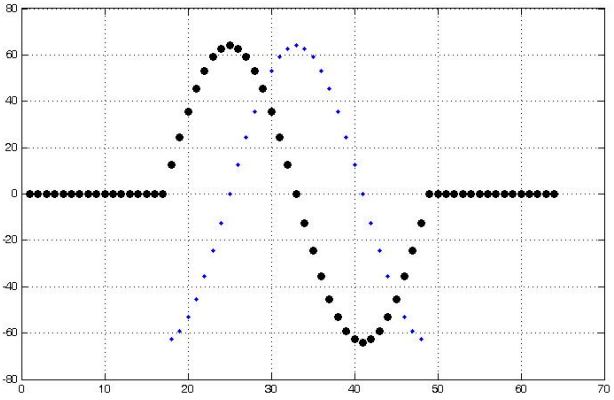
```
F = fftshift(fft(f));
plot(real(F),'o');
```

Bosqueje cuál sería el gráfico que se obtiene del siguiente comando (no es necesario encontrar cada punto, basta una linea aproximada)[1].

```
plot(imag(F));
```

Resultado: Primero es necesario identificar que la señal tiene una forma parecida a un sinc (de hecho es un sinc). En segundo lugar se debe notar que la señal está trasladada en dos muestras hacia la derecha. De la forma sinc se deduce que la magnitud de la DFT debe ser rect (o parecida), es decir, constante para un rango de frecuencias. Del desplazamiento se deduce que hay una modulación de $e^{-i2\pi 2k/N}$. La modulación es equivalente a dos ciclos en N muestras. Por lo que el gráfico de la DFT deber ser un coseno en la parte real y un seno en la parte imaginaria, ambos de periodo N/2 muestras. Es decir el gráfico de la parte imaginaria es

[1] Si le sale más fácil puede dibujar su gráfico en esta hoja directamente sobre la segunda figura y entregar el enunciado junto con sus soluciones. Si lo hace así colóquele nombre al enunciado.



3. [4 ptos] **Estiramiento interpolado.** Se tiene una señal $f[n]$ de largo N cuya DFT es $F[k]$. Se desea formar la señal estirada $g[n]$ de largo $2N$. Pero en vez de agregar ceros entre muestras, se agrega el promedio de las muestras adyacentes, es decir,

$$g[n] = \left(f_0 \quad \frac{f_0 + f_1}{2} \quad f_1 \quad \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \cdots \quad f_{N-1} \quad \frac{f_{N-1} + f_0}{2} \right).$$

Nótese que el último valor es el promedio de la última y primera muestra original. Encuentre la DFT de $g[n]$ en función de $F[k]$, empleando

a) [2 ptos] propiedades de la DFT aplicadas a $f[n]$ para encontrar $g[n]$.

b) [2 ptos] la convolución cíclica con un triángulo discreto.

Resultado:

a) $g[n]$ se puede escribir como la suma de las siguientes secuencias:

$$(f_0 \quad 0 \quad f_1 \quad 0 \quad \cdots \quad f_{N-1} \quad 0) \longrightarrow \frac{1}{2}F[k]$$

$$\frac{1}{2}(0 \quad f_0 \quad 0 \quad f_1 \quad 0 \quad \cdots \quad f_{N-1}) \longrightarrow \frac{1}{2}e^{-i\pi k/N}F[k]$$

$$\frac{1}{2}(0 \quad f_1 \quad 0 \quad f_2 \quad 0 \quad \cdots \quad f_0) \longrightarrow \frac{1}{2}e^{i\pi k/N}F[k]$$

por lo que

$$g[n] \longrightarrow \frac{1}{2}F[k]\left(1 + \frac{1}{2}e^{-i\pi k/N} + \frac{1}{2}e^{i\pi k/N}\right) = \frac{1}{2}F[k](1 + cos\pi k/N)$$

b) Se obtiene el mismo resultado si se convolucionan los siguientes dos vectores (el segundo es un triángulo discreto)

$$(f_0 \quad 0 \quad f_1 \quad 0 \quad \cdots \quad f_{N-1} \quad 0) \longrightarrow \frac{1}{2}F[k]$$

$$(1 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1/2) \longrightarrow 1 + cos\pi k/N$$

por lo que

$$g[n] \longrightarrow \frac{1}{2}F[k](1 + cos\pi k/N)$$

4. [4 ptos] **STFT deslizante.** Un sistema debe tomar la DFT de largo N en forma deslizante a las muestras. Si la DFT de N muestras es

$$f[n] = (f_0\ f_1\ \cdots\ f_{N-1}) \longrightarrow F[k],$$

encuentre la DFT de $g[n]$ en función de $F[k]$. $g[n]$ es igual a $f[n]$ pero que se deslizó a la izquierda en una muestra y recibió por la derecha una muestra x extra:

$$g[n] = (f_1\ f_2\ \cdots\ f_{N-1}\ x).$$

Resultado: Tenemos

$$f[n] = (f_0\ f_1\ \cdots\ f_{N-1}) \longrightarrow F[k]$$
$$g[n] = (f_1\ f_2\ \cdots\ f_{N-1}\ x) \longrightarrow G[k]$$

pero

$$(f_0\ 0\ \cdots\ 0) \longrightarrow \frac{1}{N}f_0$$
$$(x\ 0\ \cdots\ 0) \longrightarrow \frac{1}{N}x$$

Sea $g'[n] = f[n] - (f_0\ 0\ \cdots\ 0) + (x\ 0\ \cdots\ 0)$

$$g'[n] \longrightarrow F[k] + \frac{1}{N}(x - f_0)$$

y finalmente

$$g[n] = g'[n+1] \longrightarrow e^{i2\pi k/N}\left(F[k] + \frac{1}{N}(x - f_0)\right)$$

5. [5 ptos] **Señal geométrica.** Sea

$$f[n] = \frac{1}{2^n}$$

de largo N. Encuentre la DFT de $f[n]$ evaluada en

a) [1 ptos] $k = 0$
b) [2 ptos] $k = N/2$
c) [2 ptos] $k = N/4$

Resultado: La DFT es

$$F[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}e^{-i2\pi kn/N}$$

a)

$$F[0] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2^n} = \frac{1 - 1/2^N}{N/2}$$

b)

$$F[N/2] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}e^{-i\pi n}$$

$$F[N/2] = \frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$$F[N/2] = \frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)-\frac{1}{2N}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

$$F[N/2] = \frac{1-1/4^{N/2}}{6N/4}$$

c)

$$F[N/4] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}e^{-i\pi n/2}$$

$$F[N/4] = \frac{1}{N}\left(1-i\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+i\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-i\frac{1}{32}-\cdots\right)$$

$$F[N/4] = \frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{16}+\cdots\right)-\frac{i}{2N}\left(1+\frac{1}{16}+\cdots\right)-\frac{1}{4N}\left(1+\frac{1}{16}+\cdots\right)+\frac{i}{8N}\left(1+\frac{1}{16}+\right)$$

$$F[N/4] = \frac{6-3i}{8N}\times\frac{1-1/16^{N/4}}{15/16}$$

6. [6 ptos] **Dos dominios.** Sea $F(u)$ la transformada de Fourier de $f(x)$.

   a) [3 ptos] Encuentre el valor de

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)$$

   en función de una suma de valores de $F(u)$.

   b) [3 ptos] Encuentre el valor de

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-nT)$$

   en función de una suma de valores de $F(u)$ y x.

Resultado:

a) Como $f(nT)$ son las muestras de $f(x)$ tenemos

$$f(x)\text{Ш}(x/T) \longrightarrow F(u) * \text{Ш}(Tu)$$

Sabiendo que el coeficiente de componente continua es la integral de la función tenemos

$$\begin{aligned}\sum_n f(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\text{Ш}(x/T)\,dx &= F(u) * \text{Ш}(Tu)\big|_{u=0} \\ &= \sum_n F(n/T)\end{aligned}$$

b) Vamos a seguir el mismo racionamiento pero desplazando las muestras de $f(x)$ en Δ, es decir (nótese que no importa invertir la función porque de todas maneras vamos a sumar todas las muestras),

$$f(x)\text{Ш}((\Delta - x)/T) \longrightarrow F(u) * \text{Ш}(Tu)e^{-i2\pi\Delta u}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\sum_n f(\Delta - nT) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\text{Ш}((\Delta - x)/T)\,dx &= F(u) * \text{Ш}(Tu)e^{-i2\pi\Delta u}\Big|_{u=0} \\ &= \sum_n F(n/T)e^{-i2\pi\Delta n/T}\end{aligned}$$

Es decir, sustituyendo Δ por x,

$$\sum_m f(x - nT) = \sum_n F(n/T)e^{-i2\pi x n/T}$$

Éstas son las fórmulas de Poisson.