Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 10

4 de Noviembre 2022

---

1. Explique que es la FFT y por que se utiliza

   La *Fast Fourier Transform* es un algoritmo desarrollado para procesamiento computacional de señales que tiene como propósito obtener la DFT de una forma más rápida y eficiente de lo que se obtendría utilizando la definición de DFT directamente.

   Existen diferentes implementaciones de la FFT. Una de ellas consiste en separar la secuencia $\tilde{x}[n]$ de largo N en dos, donde N es un entero potencia de 2, es decir $N = 2^{\nu}$. La primera mitad corresponde a aquellos puntos donde n es par y la segunda donde n es impar. Considerando la definición de DFT:

   $$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

   Si ahora dividimos $\tilde{x}[n]$ en la suma de las transformadas para n par y para n impar:

   $$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=\text{par}} \tilde{x}[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} + \sum_{n=\text{impar}} \tilde{x}[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \right)$$

   A continuación, se sustituye $n = 2r$ para los n pares y $n = 2r + 1$ para los n impares, obteniendo:

   $$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \left(\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{x}[2r] e^{-i4\pi k \frac{r}{N}} + e^{-i2\pi \frac{k}{N}} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{x}[2r+1] e^{-i4\pi k \frac{r}{N}} \right)$$

   Es fácil observar que para el cálculo de una DFT de un vector cuyo periodo sea de largo N a través del método directo son necesarias N^2 multiplicaciones complejas y $(N1)^2$ sumas complejas. Al subdividir en 2 el vector de entrada, para cada DFT de $\frac{N}{2}$ muestras se deben realizar $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ multiplicaciones complejas e igual cantidad de sumas complejas. Son necesarias además N multiplicaciones complejas, por último, N sumas

complejas para considerar índices pares e impares. Por lo tanto, el cálculo completo requiere a lo más $N + \frac{N^2}{2}$ sumas complejas y multiplicaciones complejas.

Si la cantidad N/2 es par, es posible aplicar el mismo procedimiento, de tal forma que se aplique ahora la DFT a un conjunto de cuatro vectores de N/4.

Producto de esta nueva descomposición el factor $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ se reemplaza por $\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{4}\right)^2$, luego el nuevo número, tanto de sumas complejas como de multiplicaciones complejas a realizar, es $2N + 4\left(\frac{N}{4}\right)^2$. Si se cumple que $N = 2^\nu$ el mismo procedimiento se puede repetir $\nu = \log_2 N$ veces. Descomponiendo ν veces el vector de entrada, es posible realizar la DFT en $N \log_2 N$ sumas complejas e igual número de multiplicaciones complejas

2. Explique los requerimientos de muestreo de una señal para que en esta no se produzca derrame.

   Para sacar DFT de una señal es encesario tomar un número de muestras que contenga un múltiplo entero del número de muestras en un período para que no se produzca derrame.

3. Determine la resolución en frecuencia de una señal temporal de 120 muestras muestreada a período $0.036[s]$

   Sabemos que $NUT = 1$, por lo que para este caso:

   a) N = 120

   b) T = 0.036

   c) $U = \frac{1}{120 \cdot 0.036} \approx 0.2315$