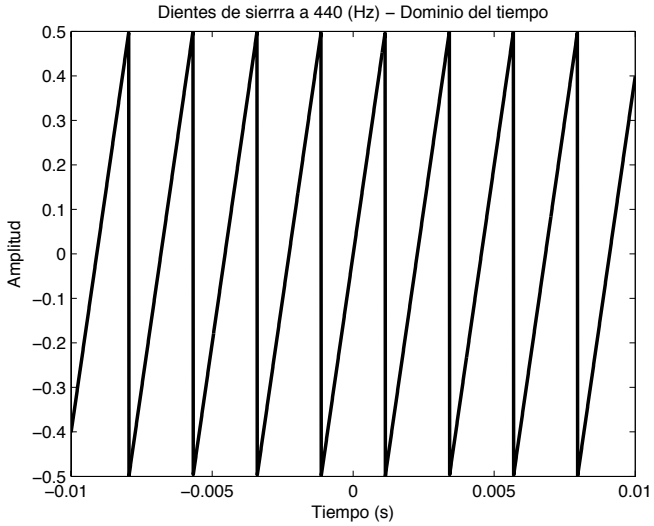
Interrogación 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (10 pts.) **Síntesis de Sonidos.** La señal *dientes de sierra* (*sawtooth* en inglés) es una señal periódica no sinusoidal ampliamente utilizada en la síntesis de audio tanto analógica como digital debido a su contenido de armónicos y su simplicidad. Se puede graficar en el dominio del tiempo tal como se presenta en el siguiente gráfico:



   (a) (5 pts.) Definiendo la señal dientes de sierra $S(t)$ a una frecuencia dada u_s tal que $S(0) = 0$, encuentre una expansion en series de Fourier en su forma trigonométrica.

   (b) (5 pts.) En síntesis digital no es posible obtener la suma completa de Fourier. Suponga que desea grabar este sonido de frecuencia u_s en un disco digital utilizando la frecuencia de muestreo de audio habitual (44.1 kHz), de modo que usted debe evaluar la suma parcial

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(2\pi k u_s t) + b_k \sin(2\pi k u_s t)\right]$$

   Escoja el valor máximo que n puede tomar de modo de obtener una representación fiel de la señal dientes de sierra en el CD de audio.

Solución:

(a) Observe que un periodo completo de la función queda determinado por $u_s t \sqcap (u_s t) = \text{ramp}(u_s t) \rightarrow$ **1 pts.** Luego,

$$a_k = u_s^2 \int_{-1/2u_s}^{1/2u_s} t \cos(2\pi k u_s t)\, dt = 0 \quad \text{por paridad} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

$$b_k = u_s^2 \int_{-1/2u_s}^{1/2u_s} t \sin(2k\pi u_s t)\, dt$$

Esta última integral sí requiere ser calculada. Haciendo integración por partes, $\rightarrow$ **1 pts.**

$$\begin{cases} u = t & \rightarrow du = dt \\ dv = \sin(2k\pi u_s t)\, dt & \rightarrow v = -\dfrac{1}{2k\pi u_s} \cos(2k\pi u_s t) \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} b_k &= u_s^2 \left[-\frac{t}{2k\pi u_s} \cos(2k\pi u_s t) \Big|_{-1/2u_s}^{1/2u_s} + \frac{1}{2k\pi u_s} \int_{-1/2u_s}^{1/2u_s} \cos(2k\pi u_s t)\, dt \right] \\ &= u_s^2 \left[-\frac{1}{2k\pi u_s^2} \cos(k\pi) + \frac{1}{(2k\pi u_s)^2} \sin(2k\pi u_s t) \Big|_{-1/2u_s}^{1/2u_s} \right] \\ &= u_s^2 \left[-\frac{1}{2k\pi u_s^2} (-1)^k + \frac{2}{\cancel{(2k\pi u_s)^2}} \cancel{\sin(k\pi)} \right] \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\boxed{a_k = 0} \qquad \text{y} \qquad \boxed{b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2k\pi}} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Concluyendo entonces que:

$$\boxed{S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k\pi} \sin(2k\pi u_s t)} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

(b) Al estar muestreado a una frecuencia de muestreo dada ν, la distancia entre los impulsos en el espacio de la frecuencia es ν. Luego, no pueden aparecer contenidos de frecuencia superiores a $\nu/2$. De hecho, para evitar aliasing los contenidos de frecuencia altos deben ser eliminados con un filtro pasabajos o por el truncamiento de la suma en este caso. $\rightarrow$ **1 pts.**

Al truncar la suma en n, la máxima frecuencia que aparecerá en el espacio de Fourier será $nu_s \rightarrow$ **1 pts.**.

Entonces, es necesario que

$$nu_s \leq \frac{\nu}{2} \rightarrow n \leq \frac{\nu}{2u_s} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Dado que n es entero,

$$\boxed{n \leq \left\lfloor \frac{\nu}{2u_s} \right\rfloor}$$

donde $\nu = 44100\,\text{kHz}$. $\rightarrow$ **1 pts.**

2. (10 pts.) **Transformada de Fourier.** Sea $f(x)$ una función continua cuya Transformada de Fourier existe y se denota por $F(u)$. Para $\tau \in \mathbb{R}$ fijo se define la función $\varphi(t)$ como

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(t + n\tau\right)$$

(a) (2 pts.) Decida qué Transformada de Fourier se debiese calcular para $\varphi(t)$: FT, DTFT, DFFT ó DFT. Justifique **brevemente**.

(b) (8 pts.) Calcule dicha Transformada de Fourier para $\varphi(t)$.

Solución:

(a) Observe que:

$$\begin{aligned}\varphi\left(t+\tau\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left[t + (n+1)\,\tau\right] \\ &= \varphi\left(t\right)\end{aligned}$$

por invarianza ante traslaciones. Luego, $\varphi\left(t\right)$ es periódica de periodo $\tau \rightarrow$ **1 pts.**. Por esta razón, debe calcularse la DFFT, i.e. sus series de Fourier. $\rightarrow$ **1 pts.**

(b) Para calcular los coeficientes de la serie de Fourier, aplicamos la definición: $\rightarrow$ **2 pts.**

$$c_k = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \varphi\left(t\right) e^{-\frac{i2\pi k}{\tau}t} dt = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\tau} f\left(t + n\tau\right) e^{-\frac{i2\pi k}{\tau}t} dt$$

Hagamos $u = t + n\tau \rightarrow du = dt$, de modo que

$$c_k = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f\left(u\right) e^{-i\frac{2\pi k}{\tau}(u - n\tau)} du$$

Pero $\frac{2\pi k}{\tau}\left(t - n\tau\right) = \frac{2\pi k}{\tau}t - 2\pi k n$. Como la exponencial compleja tiene período 2π, entonces, $\rightarrow$ **2 pts.**

$$c_k = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f(t)\, e^{-i\frac{2\pi k}{\tau}t}dt$$

Como estamos integrando intervalos consecutivos, entonces: → **2 pts.**

$$c_k = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i2\pi\frac{k}{\tau}t} = \frac{1}{\tau}F\left(\frac{k}{\tau}\right)$$

Es decir, concluimos que:

$$\boxed{\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n\tau) = \frac{1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{\tau}\right) e^{i\frac{2\pi k}{\tau}t}}$$

que es el resultado pedido. → **2 pts.** En particular, para $\tau = 1$ y $t = 0$ se obtiene que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)$$

para una función continua f cualquiera.

3. (10 pts.) **Transformada Discreta.**

   (a) (4 pts.) Dada la secuencia $f[n] = (0\ 1\ 2\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0)$, calcule de manera analítica la DFT de $f[n]$.

   (b) (2 pts.) Para la pregunta anterior, ¿Cuantas operaciones tomó el calculo de la DFT? ¿Cuantas operaciones tomaría realizar el mismo cálculo utilizando la FFT? Nota: Considere multiplicaciones por cero como si fueran una operación.

   (c) (4 pts.) Se tiene el par DFT $(\ a\ \ b\ \ c\ \ d\ ) \rightarrow (\ A\ \ B\ \ C\ \ D\ )$, determine la DFT de $(\ a\ \ -b\ \ c\ \ -d\ \ -d\ \ c\ \ -b\ \ a\ )$, transformando el par DFT original por medio de propiedades.

Solución:

(a) Existen varias formas de calcular esta DFT. La opción más directa es utilizar la matriz DFT de 8x8, que es la siguiente:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & i & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\
1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\
1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i & i & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \\
1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i
\end{bmatrix}$$

El resultado de la DFT es

$$\text{DFT}[0] = \frac{1+2+2+1}{8} = \frac{6}{8}$$
$$\text{DFT}[1] = -\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}-2}{2})i$$
$$\text{DFT}[2] = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8}i$$
$$\text{DFT}[3] = \frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}+2}{2})i$$
$$\text{DFT}[4] = 0$$
$$\text{DFT}[5] = \frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}+2}{2})i$$
$$\text{DFT}[6] = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8}i$$
$$\text{DFT}[7] = -\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{8}(\frac{\sqrt{2}-2}{2})i$$

Otra estrategia de solución podría ser descomponer $f[n]$ en la suma de $(0\,1\,2\,0\,0\,0\,0\,0)+$ $(0\,0\,0\,0\,0\,2\,1\,0)$ y utilizar la propiedad que $f[-n] \to F[-k]$.

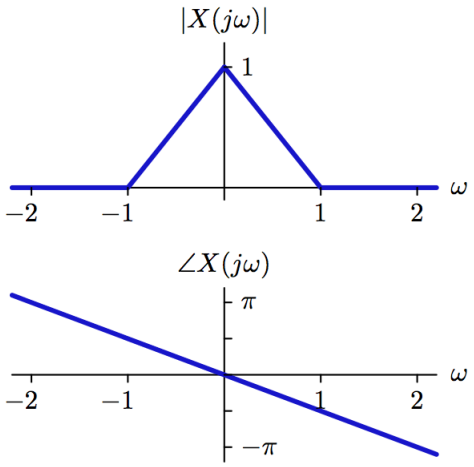
(b) Si contamos las multiplicaciones por cero como operaciones, en el caso de la DFT se necesitan $N^2 = 8^2 = 64$ operaciones, mientras que en la FFT solo bastan $N\log(N) = 8\log(8) \approx 17$ operaciones.

(c) La solución se puede obtener mediante los siguientes pasos:

- Desplazar en el tiempo para obtener $(\ c \quad d \quad a \quad b\ ) \to (\ A \quad -B \quad C \quad -D\ )$.
- Usar la propiedad de desplazamiento en frecuencia para obtener $(\ c \quad -d \quad a \quad -b\ ) \to$ $(\ C \quad -D \quad A \quad -B\ )$.
- Acolchar con ceros, para obtener algo de la forma $(\ c \quad -d \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad a \quad -b\ ) \to$ $(\ C \quad X_1 \quad -D \quad X_3 \quad A \quad X_5 \quad -B \quad X_7\ )$, donde X_n es la interpolación entre un término y otro, que se puede obtener en términos de la señal en el dominio del tiempo, podemos escribir $X_n = ce - de^{-2\pi n/8} + ae^{-12\pi n/8} - be^{-14\pi n/8}$.
- Desplazar la señal anterior para obtener la DFT de $(\ a \quad -b \quad c \quad -d \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ )$, que es $(\ C \quad iX_1 \quad D \quad -iX_3 \quad A \quad iX_5 \quad B \quad -iX_7\ )$.
- Usar propiedad de dualidad para obtener la DFT de $(\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -d \quad c \quad -b \quad a\ )$, que es $(\ -iX_7 \quad B \quad iX_5 \quad A \quad -iX_3 \quad D \quad iX_1 \quad C\ )$ y sumar esta con la anterior.
- El resultado final sería:

$$(\ C - iX_7 \quad B + iX_1 \quad D + iX_5 \quad A - iX_3 \quad A - iX_3 \quad D + iX_5 \quad B + iX_1 \quad C - iX_7\ )$$

4. (10 pts.) **Magnitudes y Fases.** Sea $x(t)$ una función cuya Transformada de Fourier (magnitud y fase) se muestra en la figura siguiente[1]:

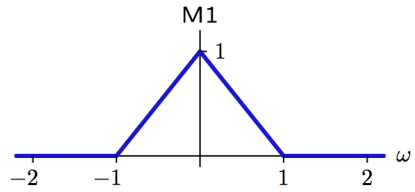


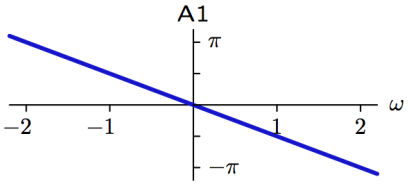
Cinco señales se derivan de $x(t)$, de acuerdo a la primera columna de la siguiente tabla.

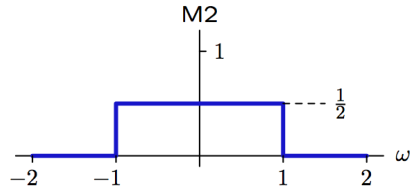
Señal	Magnitud	Fase
$\frac{dx(t)}{dt}$		
$(x * x)(t)$		
$x(t - \frac{\pi}{2})$		
$x(2t)$		
$x^2(t)$		

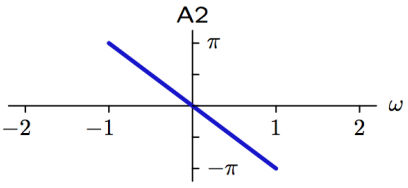
Complete las columnas 2 (magnitudes) y 3 (fases) de la tabla anterior, indicando las etiquetas de magnitud y fase correspondientes a cada señal de acuerdo a la posibilidades descritas en la figuras siguientes

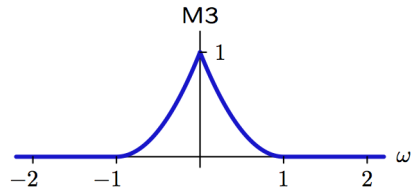
[1]Dennis Freeman, 6.003 Signals and Systems, Fall 2011. (MIT OpenCourseWare: Massachusetts Institute of Technology), `http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-003-signals-and-systems-fall-2011/` (Accesado Oct. 10 2011). Licencia: Creative commons BY-NC-SA

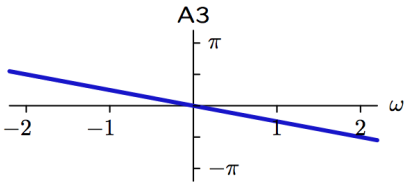


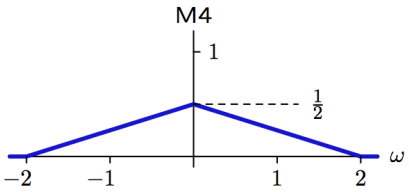


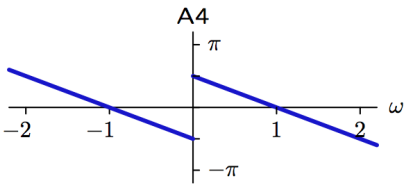


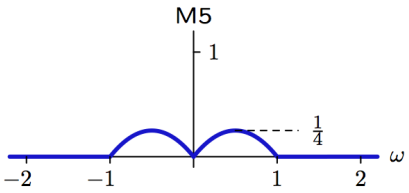


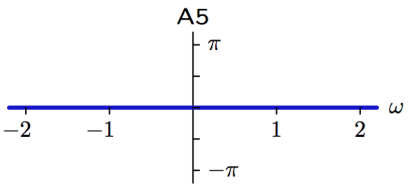


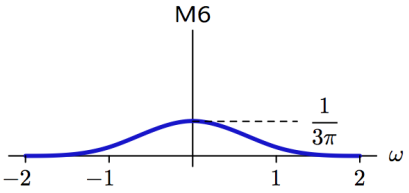


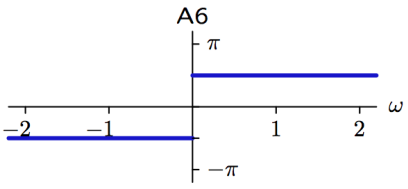












Solución:

Esta pregunta se resuelve por inspección y aplicando las propiedades de la Transformada de Fourier. La tabla completa es:

Señal	Magnitud	Fase
$\frac{dx(t)}{dt}$	M5	A4
$(x * x)(t)$	M3	A2
$x(t - \frac{\pi}{2})$	M1	A2
$x(2t)$	M4	A3
$x^2(t)$	M6	A1

5. (10 pts.) **Modulación de Amplitud.** La modulación de amplitud (AM) es una técnica utilizada en la comunicación electrónica y en la síntesis de sonidos, cuya gran ventaja es la simplicidad de su demodulación (recuperación de la señal original). Una ecuación básica de una señal $f(t)$ modulada en amplitud es:

$$S(t) = \alpha f(t) \cos(\omega_p t)$$

donde $S(t)$ es la señal modulada, α es un parámetro del sistema y ω_p es la frecuencia angular de la señal portadora.

(a) (3 pts.) Considere que se desea transmitir una señal $f(t)$ de ancho de banda limitado a $\omega_{\max}$. Determine condiciones sobre ω_p para que la señal sea demodulable.

(b) (7 pts.) Suponiendo que se ha escogido un ω_p apropiado, se desea realizar la demodulación. Usted solo dispone de amplificadores, filtros pasabajos ideales y moduladores AM. Diseñe un sistema que realice demodulación AM, i.e. que la entrada sea una señal modulada $S(t)$ y el resultado sea la señal original $f(t)$. Exprese su resultado mediante diagramas de bloques.

Solución:

(a) Observe que del ancho de banda limitado, $F(u) \neq 0$ solo si $|\omega_{\max}|$. Por otra parte,

$$\mathcal{F}\{S(t)\} = \alpha \frac{\pi}{\omega_p} F(u) * \uparrow\uparrow \left(\frac{\pi}{\omega_p} u\right)$$

Es decir, en la frecuencia se está convolucionando la señal con dos impulsos a distancia ω_p/π entre ellos. → **1 pts.** Como no puede ocurrir que las señales se superpongan al ocurrir la superposición. Entonces la distancia entre los impulsos tiene que ser mayor a 2 veces la frecuencia máxima de la señal f.
De esta forma se concluye que: → **2 pts.**

$$\frac{\omega_p}{\pi} \geq 2\omega_{\max} \rightarrow \boxed{\omega_p \geq 2\pi\omega_{\max}}$$

(b) Al haber ocurrido la modulación, todo el espectro de frecuencias se duplica, con centros ubicados en $-\omega_p/2\pi$ y $\omega_p/2\pi$. Para recuperar la señal original se requiere tomar uno de los espectros de frecuencias y reubicarlo en el centro, ya que no disponemos

de un filtro pasabandas y su uso tampoco sería apropiado, ya que el contenido de frecuencias sigue estando desplazado.

Para lograr reubicar al centro uno de los espectros, una buena idea es convolucionar con la misma señal moduladora en la frecuencia, i.e.

$$S(t) \longrightarrow S(t)\cos(\omega_p t) \sim \alpha\frac{\pi^2}{\omega_p^2}F(u) * \uparrow\uparrow\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right) * \uparrow\uparrow\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right)$$

Esto produce cuatro réplicas de $F(u)$ en el espectro de la frecuencia $\rightarrow$ **2 pts.**, uno de ellos centrado. Como se ha escogido un ω_p apropiado, no se produce superposición entre cada uno de los espectros, y por lo tanto podemos considerar el espectro central aplicando un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $u_{\max}$ o $\omega_p/2\pi$. Considerando el segundo caso,

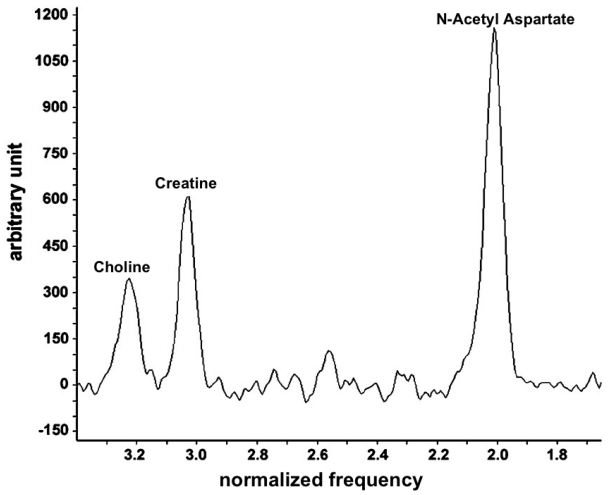
$$\alpha\frac{\pi^2}{\omega_p^2}F(u) * \uparrow\uparrow\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right) * \uparrow\uparrow\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right) \longrightarrow \alpha\frac{\pi^2}{\omega_p^2}F(u) * \uparrow\uparrow\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right) * \uparrow\uparrow\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right) \sqcap\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right)$$
$$= \alpha\frac{\pi^2}{\omega_p^2}F(u) \sim \frac{\omega_p}{\pi}S(t)\cos(\omega_p t) * \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_p}{\pi}u\right)$$

De esta forma ya hemos obtenido la señal original $\rightarrow$ **3 pts.**, pero falta escalarla adecuadamente. Como en el espectro de la frecuencia debemos recuperar $F(u)$, entonces aprovechando la linealidad de la Transformada de Fourier amplificamos la señal modulada por $\omega_p^2/\left(\alpha\pi^2\right)$ para llegar al resultado final: $\rightarrow$ **1 pts.**

$$S(t) \longrightarrow \text{modulador AM} \longrightarrow H(u) = \sqcap\left(\frac{\pi}{\omega_p}u\right) \longrightarrow\triangleright \frac{\omega_p^2}{\alpha\pi^2} \longrightarrow f(t)$$

Mediante estas operaciones llegamos a la señal original. El orden de ubicación del amplificador bajo condiciones ideales no es relevante. $\rightarrow$ **1 pts.**

6. (5 pts.) **Resonancia Magnética.** La espectroscopía por Resonancia Magnética (MRS) es una técnica que permite determinar la composición química de un tejido. A diferencia de las imágenes de resonancia magnética, la MRS es unidimensional y entrega como resultado un espectro en frecuencia, como el que se muestra en la figura siguiente. En este espectro, los diversos compuestos químicos aparecen como peaks ubicados a diferentes frecuencias, y el área de cada peak es proporcional al contenido de dicho compuesto en el tejido. La espectroscopía permite, por ejemplo, determinar el porcentaje de grasa presente en un tejido.



En un resonador de 1.5 T, la diferencia de frecuencia entre el agua y la grasa es de aproximadamente 225 Hz. Si se desea obtener una espectroscopía de 32000 puntos en la que sea posible distinguir el peak de agua del peak de grasa, ¿a qué frecuencia deben estar muestreados los datos? ¿cuanto tiempo dura la adquisición? Considere los peaks del espectro como si fueran impulsos.

Solución:

Sabemos que $NUT = 1$. Como queremos distinguir dos peaks que están separados por 225 Hz, necesitamos como máximo $U = 225$ y además se nos indica que $N = 32000$. Con ello, $T = \dfrac{1}{NU} = \dfrac{1}{7.2\ 10^6}$.

Así la frecuencia de muestreo $f_s = \dfrac{1}{T} = 7.2$ MHz. El tiempo de adquisición para los N puntos es $NT = \dfrac{1}{U} = 4.4$ ms.

7. (BONUS 6 pts.) **Transformada de Hilbert.** Se define la transformada de Hilbert $y(t)$ de la función $x(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

   (a) (2 pts.) Si $x(t) \to y(t)$, encuentre las siguientes propiedades:
      i. Escalamiento. Para $a \neq 0$, $x(at) \to ?$
      ii. Desplazamiento. Para a real. $x(t-a) \to ?$
      iii. Dualidad. $y(t) \to ?$
      iv. Derivada. $\dfrac{dx}{dt} \to ?$

   (b) (2 pts.) Encuentre la transformada de Hilbert de $\text{sinc}\,(t)$

(c) (2 pts.) ¿Cuál es la relación entre la transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$?

Solución:

Antes de analizar las propiedades, notamos que

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$
$$Y(u) = -i\text{sgn}(u)X(u)$$

(a) Propiedades:

i. Escalamiento. Utilizando la definición integral y un cambio de variable $x(at) \to \text{sgn}(a)y(at)$. El término $\text{sgn}(a)$ aparece pues del signo de a se intercambian los límites de integración.

ii. Desplazamiento. Utilizando la definición integral y un cambio de variable $x(t-a) \to y(t-a)$

iii. Dualidad. En el dominio de la frecuencia, la transformada de Hilbert de $y(t)$ es

$$\begin{aligned} -i\text{sgn}(u)Y(u) &= -i\text{sgn}(u)\left(-i\text{sgn}(u)X(u)\right) \\ &= -X(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si volvemos al dominio del tiempo $y(t) \to -x(t)$

iv. Derivada. Utilizando la definición de la transformada de Hilbert de convolución,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\to \frac{dx}{dt} * \frac{1}{\pi t} \\ &\to \frac{d}{dt}\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{dx}{dt} \to \dfrac{dy}{dt}$

(b) En el dominio de Fourier, la transformada de Hilbert de $\text{sinc}\,(t)$ es:

$$\begin{aligned} -i\text{sgn}(u) \sqcap (u) &= i\left(\sqcap\left(\frac{u-1/4}{1/2}\right) - \sqcap\left(\frac{u+1/4}{1/2}\right)\right) \\ &= 4i \uparrow\downarrow (2u) * \sqcap(2u) \end{aligned}$$

Lo que en el dominio del tiempo corresponde a

$$\begin{aligned} & 4\,\frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\,\frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ &= \text{sen}^{\,2}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{2}{\pi t} \\ &= \frac{1-\cos \pi t}{\pi t} \end{aligned}$$

(c) Como se mostró antes, las transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ están relacionadas mediante la expresión $Y(u) = -i\text{sgn}(u)X(u)$