Solución Examen

1. Grafique aproximadamente la salida al sistema de entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, descrito por $y'(t) = -ay(t) + x(t)$ para la entrada $x(t) = e^{-at}\sqcap(t)$. Con $a > 0$ y real.

   Resultado: De la página 7 del libro se sabe que la solución a esa ecuación diferencial es

   $$y(t) = e^{-at}\left[\int x(t)e^{at}\,dt + c\right]$$

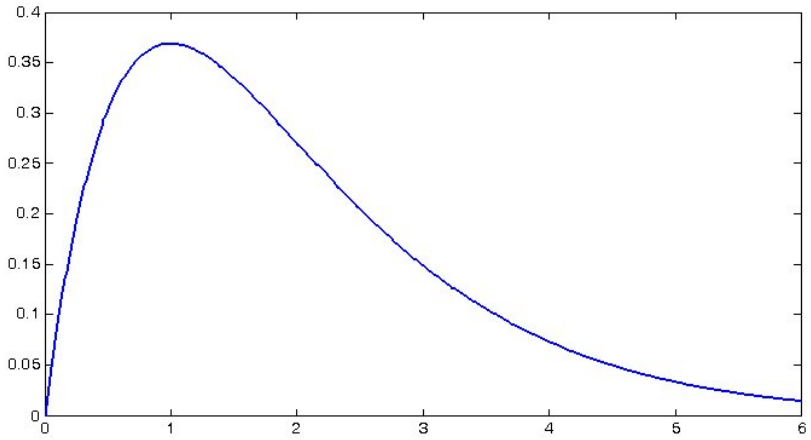
   con $x(t) = e^{-at}\sqcap(t)$ se tiene

   $$y(t) = e^{-at}\left[\int dt + c\right]$$

   pero $c = 0$ ya que $y(0) = 0$, es decir

   $$y(t) = te^{-at}$$

   cuyo gráfico es (con $a = 1$)



2. Encuentre la salida al sistema discreto de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$, descrito por $y[n] = -ay[n-1] + x[n]$ para la entrada $x[n] = a^{-n}\sqcap[n]$. Con $0 < a < 1$ y real.

   Resultado: En el dominio Z:

   $$Y(z) = -az^{-1}Y(z) + X(z)$$

   $$Y(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}}X(z)$$

   Por otro lado

   $$a^{-n}\sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

   es decir, la salida es

   $$Y(z) = \frac{1}{1 - a^2z^{-2}}$$

Como sabemos que

$$p[n] = a^{-2n} \sqcap [n] \longrightarrow P(z) = \frac{1}{1 - a^2 z^{-1}}$$

e $Y(z) = P(z^2)$, entonces,

$$y[n] = (p[0], \quad 0, \quad p[1], \quad 0, \quad p[2], \quad 0, \quad ...)$$

$$y[n] = (1, \quad 0, \quad a^{-2}, \quad 0, \quad a^{-4}, \quad 0, \quad ...)$$

3. Se tiene un sistema de control que regula el nivel en un estanque. La entrada al sistema es la altura de agua y la salida el flujo de agua de entrada al estanque. El sistema es un flotador que da o corta una válvula, igual a los sistemas de un WC. Indique y justifique si el sistema es a) causal y b) lineal.

   Resultado:

   a) El sistema es causal, porque se trata de un sistema real y el mundo en que vivimos es causal.

   b) No es lineal. La salida es algún tipo de inverso, porque cuando el agua sube, el flujo baja. Si fuera inversamente proporcional es claro que no es lineal. Pero si fuera de la forma flujo = $K-$nivel, tampoco es lineal porque la constante hace que se pierda la homogeneidad.

4. La función $\delta(\text{sen}(\pi/x))$ representa la suma de muchos impulsos. Grafique seis de esos impulsos.

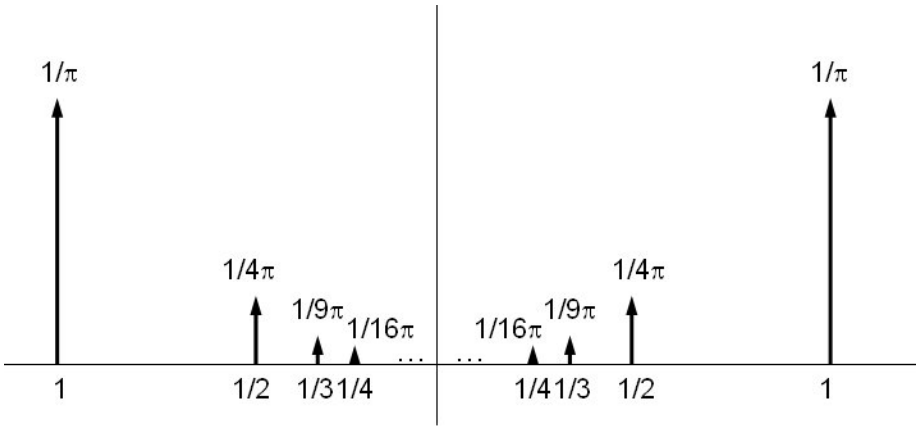
   Resultado: Las posiciones de los deltas estarán en los ceros de $\text{sen}(\pi/x)$ que son de la forma $x_k = 1/k$. La magnitud de los impulsos será

$$\left| \frac{d}{dx} \text{sen}(\pi/x) \right|^{-1} = \left| -\frac{\pi}{x^2} \cos(\pi/x) \right|^{-1}$$

   que al evaluarse en los ceros es $(\pi k^2)^{-1}$.

$$\delta(\text{sen}(\pi/x)) = \sum_k \frac{\delta(x - 1/k)}{\pi k^2}$$

   El gráfico de los ocho impulsos más grandes es



5. Grafique la transformada de Fourier inversa de

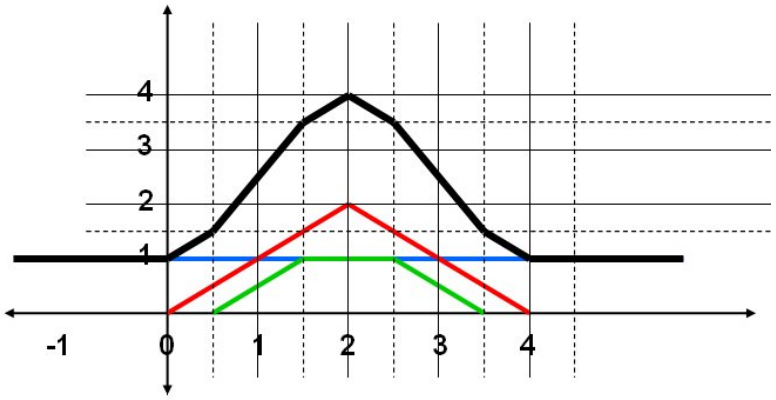
$$[(\sqcup\!\sqcup(u) + 2\cos\pi u)\,\mathrm{sinc}^2 u + 4\,\mathrm{sinc}^2(2u)]e^{-i4\pi u}$$

Resultado:

$$\mathcal{F}\{(\sqcup\!\sqcup(u) + 2\cos\pi u)\,\mathrm{sinc}^2 u + 4\,\mathrm{sinc}^2(2u)\} * \delta(x-2)$$

$$\{(\sqcup\!\sqcup(x) + 2 \uparrow\uparrow (x)) * \wedge(x) + 2 \wedge (x/2)\} * \delta(x-2)$$

El gráfico muestra la función. En azul $\sqcup\!\sqcup(x)*\wedge(x)*\delta(x-2)$, en verde $2 \uparrow\uparrow (x)*\wedge(x)*\delta(x-2)$ y en rojo $2 \wedge (x/2) * \delta(x-2)$.



6. Se tiene un sistema variante en x cuya respuesta a un impulso ubicado en la posición a es $a\,\mathrm{sinc}\,(x/a)$. Encuentre la salida de este sistema a la entrada $f(x) = \sqcup\!\sqcup(x)$, evaluada en $x = -1, 0$ y 1, es decir, $g(-1)$, $g(0)$ y $g(1)$.

Resultado: La integral de superposición es

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcup\!\sqcup(\xi) x\,\mathrm{sinc}\,(\xi/x)\,d\xi = x\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi-k)\,\mathrm{sinc}\,(\xi/x)d\xi = x\sum_k \mathrm{sinc}\,(k/x)$$

Evaluando en los puntos pedidos

$$g(-1) = -1\sum_k \mathrm{sinc}\,(-k) = -(\cdots + \mathrm{sinc}\,(2) + \mathrm{sinc}\,(1) + \mathrm{sinc}\,(0) + \mathrm{sinc}\,(-1) + \cdots)$$

$$g(-1) = -(\cdots + 0 + 0 + 1 + 0 + \cdots) = -1$$

$$g(0) = 0\sum_k \mathrm{sinc}\,(k/0) = 0$$

No hay problema con la división por cero porque eso hace que el argumento del sinc tienda a infinito y por lo tanto el valor del sinc a cero.

$$g(1) = 1\sum_k \mathrm{sinc}\,(k) = \cdots + \mathrm{sinc}\,(-2) + \mathrm{sinc}\,(-1) + \mathrm{sinc}\,(0) + \mathrm{sinc}\,(1) + \cdots$$

$$g(1) = \cdots + 0 + 0 + 1 + 0 + \cdots = 1$$

7. Se define la transformada de Mellin, $F_M(s)$, de una función $f(x)$ como

$$F_M(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx.$$

Encuentre la transformada de Mellin de la función $f(x) = \sqcap(x)$.

Resultado: Simplemente evaluando la integral se tiene

$$F_M(s) = \int_0^{1/2} x^{s-1}dx = \frac{1}{s}x^s\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{s2^s}$$

8. Encuentre la transformada de Laplace de $\sqcap(e^{-t})$.

Resultado:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(e^{-t})e^{st}dt = \int_{\ln 2}^{\infty} e^{st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{s}e^{-s\ln 2} = \frac{1}{s2^s}$$

9. Exprese la transformada de Mellin en función de la transformada de Laplace.

Resultado: En la definición de la transformada de Mellin

$$F_M(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx.$$

hacemos el cambio de variable $x = e^{-t}$, o sea, $dx = -e^{-t}dt$

$$F_M(s) = -\int_\infty^{-\infty} f(e^{-t})e^{-(s-1)t}e^{-t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-t})e^{-st}dt$$

Es decir,

$$F_m(s) = \mathcal{L}\{f(e^{-t})\}$$

10. Grafique un periodo de la función expandida por la serie de Fourier cuyos coeficientes son

$$C_{-2} = i,\ \ C_{-1} = -i,\ \ C_0 = 1,\ \ C_1 = i,\ \ C_2 = -i \ \text{ y } C_k = 0 \text{ para } |k| > 2.$$

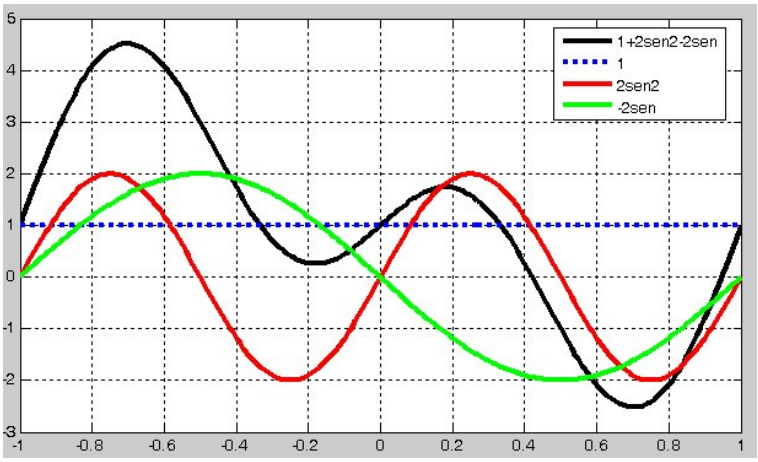
Resultado: Sustituyendo en

$$f(x) = \sum_k C_k e^{ik\omega_0 x}$$

se tiene

$$f(x) = ie^{-i2\omega_0 x} - ie^{-i\omega_0 x} + 1 + ie^{i\omega_0 x} - ie^{-i2\omega_0 x}$$

$$f(x) = 1 + 2\operatorname{sen} 2\omega_0 x - 2\operatorname{sen}\omega_0 x$$



11. Encuentre los valores de $f[n]$, para $-7 < n < 7$, la transformada Z inversa de

$$F(z) = \frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + 2z^2 + 3z + 4} \qquad |z| > r_\alpha$$

Resultado: Haciendo una división larga (fijándose que los términos involucren a z^{-1}, ya que la función es causal, se tiene,

$$z^2 + 2z - 1 : z^3 + 2z^2 + 3z + 4 = z^{-1} - 4z^{-3} + 4z^{-4} + 4z^{-5} - 4z^{-6} - 20z^{-7} + \cdots$$

Por lo que la señal es

$$f[n] = (\cdots 0, \quad \underline{0}, \quad 1, \quad 0, \quad -4, \quad 4, \quad 4, \quad -4, \quad -20, \cdots)$$

12. Encuentre los valores de $f[n]$, para $-4 < n < 4$, la transformada Z inversa de

$$F(z) = \frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + 2z^2 + 3z + 4} \qquad |z| < r_\alpha$$

Resultado: También conviene hacerlo con una división larga, pero esta vez los términos deben involucrar a potencias positivas de z porque la función no es causal:

$$-1 + 2z + z^2 : 4 + 3z + 2z^2 + z^3 = -\frac{1}{4} + \frac{11}{16}z - \frac{9}{64}z^2 - \frac{45}{256}z^3 + \cdots$$

Por lo que la señal es

$$f[n] = (\cdots - \frac{45}{256}, \quad -\frac{9}{64}, \quad \frac{11}{16}, \quad \underline{-\frac{1}{4}}, \quad 0, \quad \cdots)$$

13. Se sabe que la región de convergencia de la transformada Z de una señal $f[n]$ derecha ($f[n] = 0$ para $n < n_0$) se extiende hacia afuera del círculo $|z| = r_\alpha$, para algún r_α. Encuentre los valores de n_0 para que esa región de convergencia incluya a $z = \infty$.

Resultado: La transformada Z en forma extendida es

$$f[n] \longrightarrow F(z) = f[n_0]z^{-n_0} + f[n_0 + 1]z^{-n_0-1} + f[n_0 + 2]z^{-n_0-2} + \cdots$$

Para que $F(z)$ converja con $z = \infty$ se necesita que $F(z)$ no sea función de z, es decir, $n_0 > 0$.

14. Se conocen los siguientes pares de Laplace

$$e^{-at}\sqcap(t) \longrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \sigma > -a$$

$$-e^{-at}\sqcap(-t) \longrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \sigma < -a$$

Encuentre los pares equivalentes para la DTLT.

Resultado: Se necesita calcular la DTLT de $e^{-anT}\sqcap[n]$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-anT}\sqcap[n]e^{-snT} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+a)nT} \\
&= \frac{1}{1-e^{-(s+a)T}} \quad \text{con } |e^{-(s+a)T}| < 1, \text{ es decir, } \sigma > -a
\end{aligned}$$

Análogamente para $-e^{-anT}\sqcap[-n-1]$ (esta función no incluye al cero).

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(s) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-anT}\sqcap[-n-1]e^{-snT} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-(s+a)nT} = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{(s+a)nT} \\
&= \frac{-1}{1-e^{(s+a)T}} + 1 \quad \text{con } |e^{(s+a)T}| < 1, \text{ es decir, } \sigma < -a \\
&= \frac{-e^{(s+a)T}}{1-e^{(s+a)T}} = \frac{1}{1-e^{-(s+a)T}}
\end{aligned}$$

Es decir los pares equivalentes son

$$e^{-anT}\sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-(s+a)T}} \qquad \sigma > -a$$

$$-e^{-anT}\sqcap[-n-1] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-(s+a)T}} \qquad \sigma < -a$$

15. Para los mismo pares de la pregunta anterior, encuentre los equivalentes para la transformada Z.

Resultado: Aprovechando el mismo resultado anterior, hacemos el cambio de variable $z = e^{sT}$ y se tiene

$$e^{-anT}\sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad |z| > e^{-aT}$$

$$-e^{-anT}\sqcap[-n-1] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad |z| < e^{-aT}$$

Para hacerlo más simple se puede sustituir $b = e^{-aT}$

$$b^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}} \qquad |z| > b$$

$$-b^n \sqcap[-n-1] \longrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}} \qquad |z| < b$$

16. Encuentre la transformada Z inversa de

$$F(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

Resultado: Se sabe que

$$\frac{1}{2^n} \sqcap[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

y

$$\frac{3}{2^{n-1}} \sqcap[n-1] \longrightarrow \frac{3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Por lo que la inversa es

$$f[n] = \frac{1}{2^n} \sqcap[n] + \frac{3}{2^{n-1}} \sqcap[n-1]$$

17. Un sistema tiene una respuesta al impulso dada por

$$h(t) = \text{sinc}\,(2t - 0{,}2)$$

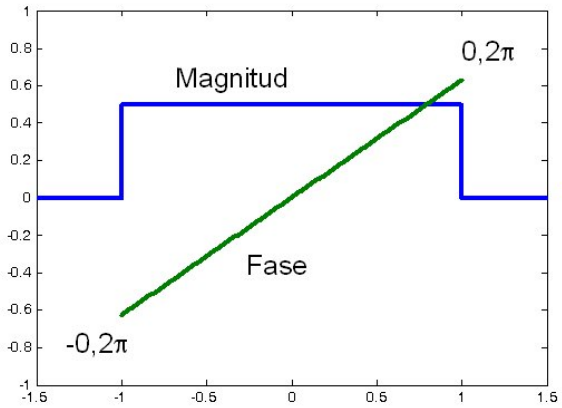
Grafique la función de transferencia en Fourier (magnitud y fase) del sistema.

Resultado:

$$\text{sinc}\,(t) \longrightarrow \sqcap(u)$$

$$\text{sinc}\,(2t) \longrightarrow \frac{1}{2} \sqcap (\frac{u}{2})$$

$$\text{sinc}\,(2(t - 0,1)) \longrightarrow \frac{1}{2} e^{i0,2\pi u} \sqcap (\frac{u}{2})$$



18. Escriba una línea de comando de Matlab que encuentre la DFT del vector x con la definición vista en el curso, y no la de Matlab que se reproduce aquí (tomado de HELP FFT).

    "The functions X = fft(x) and x = ifft(X) implement the transform and inverse transform pair given for vectors of length N by:

$$X(k) = \sum_{j=1}^{N} x(j)\omega_N^{(j-1)(k-1)} \qquad x(j) = (1/N)\sum_{k=1}^{N} X(k)\omega_N^{-(j-1)(k-1)}$$

    where $\omega_N = e^{(-2\pi i)/N}$ is an Nth root of unity".

    Resultado: La única diferencia con la definición del curso es el factor $1/N$ que debería estar en la transformada directa y no en la inversa, es decir, la línea pedida es:

    X = FFT(X)/LENGTH(X)