logo (3).pdf

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE1533 - Fundamentos de Teoría Electromagnética

Pauta I1

1. Pregunta 1 (2 puntos)

- **0,5 pt.** por definir correctamente el elemento de área $dA = R\,d\varphi\,dx \;\Rightarrow\; dA = 2\pi R\,dx$ (con $x \in [0, H]$).
- **0,5 pt.** por definir las componentes del campo ($E_x = E\,\dfrac{x}{r}$ [0,25 pt.]; justificar que por simetría $E_y = E_z = 0$ [0,25 pt.]).
- **0,5 pt.** por definir $r^2 = x^2 + R^2$ y plantear correctamente la integral.

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\sigma\,2\pi R \int_0^H \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx$$

- **0,5 pt.** por resolver la integral y llegar al resultado correcto

$$\frac{\sigma\,R}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]_0^H \;=\; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}\right)\hat{x}.$$

  **Campo debe apuntar hacia afuera del cilindro (considerar convención de coordenadas utilizadas por el alumno y el lado del cilindro en el que calcula el campo).*

- se realiza descuento de **-0,25 pt.** por cada error conceptual, error de arrastre o pasos sin justificación pertinente.

2. Pregunta 2 (2.0 puntos)

Al liberar la partícula de masa m y carga $+q$ desde el reposo en la esquina del semicírculo de radio R con distribución de carga superficial $\sigma > 0$, esta experimentará una fuerza de repulsión eléctrica. El movimiento será acelerado, alejándose de la distribución de carga hacia el infinito, donde la aceleración será nula y alcanzará su velocidad máxima.

Para encontrar la velocidad final, se aplica el principio de conservación de la energía:

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Dado que parte del reposo, $K_i = 0$. En el infinito, la energía potencial eléctrica tiende a cero, por lo que $U_f = 0$. Por lo tanto, la ecuación se reduce a:

$$qV = \frac{1}{2}mv_f^2$$

donde V es el potencial eléctrico generado por el semicírculo en la esquina.

Para calcular V, situamos el origen de coordenadas sobre la partícula. En coordenadas polares, un diferencial de área es $dA = r\,dr\,d\theta$, por lo que el diferencial de carga es $dq = \sigma r\,dr\,d\theta$. La distancia desde el origen al borde curvo del semicírculo, dada por la geometría del triángulo rectángulo inscrito, es $r = 2R\cos\theta$.

El potencial eléctrico se plantea como:

$$V = \int \frac{k\,dq}{r} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2R\cos\theta} \frac{k\sigma r\,dr\,d\theta}{r}$$

Simplificando r e integrando primero respecto al radio:

$$V = k\sigma \int_0^{\pi/2} [r]_0^{2R\cos\theta}\,d\theta$$

$$V = 2k\sigma R \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta$$

Integrando respecto al ángulo:

$$V = 2k\sigma R\Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2k\sigma R$$

Considerando la constante de Coulomb $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, el potencial en la esquina resulta:

$$V = \frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0}$$

Sustituyendo V en la ecuación de energía:

$$q\left(\frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Despejando la velocidad final v_f:

$$v_f = \sqrt{\frac{q\sigma R}{\pi\varepsilon_0 m}}$$

Distribución de puntaje

- [+0,1] Por indicar correctamente que el movimiento es de repulsión hacia el infinito debido a las cargas del mismo signo.

- [+0,4] Por plantear la conservación de la energía, identificando $K_i = 0$, $U_f = 0$ e igualando la energía potencial inicial con la cinética final.
- [+0,5] Por establecer la integral del potencial V, identificando el diferencial de carga en polares y los límites de integración geométricos (r de 0 a $2R\cos\theta$ y θ de 0 a $\pi/2$).
- [+0,7] Por resolver las integrales correctamente y obtener el potencial eléctrico en la esquina.
- [+0,3] Por reemplazar el potencial en la ecuación de energía y despejar algebraicamente la velocidad final v_f.
- Se descuenta [0,25] por cada error conceptual, error de arrastre algebraico o pasos desarrollados sin justificación matemática pertinente.

3. Pregunta 3 (1.5 puntos)

Cada placa conductora es de área $A = a^2$, y para un capacitor de placas paralelas, su capacitancia esta dada por

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

Al superponerse las placas, el área cubierta será

$$A' = a\,x$$

por lo tanto, su capacitancia será:

$$C = \frac{a\,x\,\varepsilon_0}{d}.$$

Enumerando cada placa de arriba hacia abajo de 1 a 4, considerando que, la 1 y la 3 están a igual potencial V_1, y que 2 y 4 están a un mismo potencial V_2. tendremos que, la capacitancia total del sistema estará dada por el paralelo de las formadas entre placas a diferente potencial.

Ordenando las capacitancias de arriba hacia abajo, C_1 (formada entre placas 1 y 2), C_2 (formada entre placas 2 y 3), C_3 (formada entre placas 3 y 4), tendremos que,

$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Donde

$$C_1 = C_2 = C_3 = \frac{a\,x\,\varepsilon_0}{d},$$

entonces

$$C_{\text{total}} = \frac{3a\,x\,\varepsilon_0}{d}.$$

Cuando no hay superposición,

$$x = 0$$

y la capacitancia será

$$C_{\text{total}} = 0.$$

Si la superposición es máxima, entonces

$$x = a$$

y la capacitancia será

$$C_{\text{total}} = \frac{3\varepsilon_0 a^2}{d}.$$

El rango de capacitancias cubierto será

$$\left[0, \frac{3\varepsilon_0 a^2}{d}\right], \qquad 0 \leq x \leq a.$$

En la figura 3b solo hay tres placas, entonces el rango será

$$\left[0, \frac{2a^2\varepsilon_0}{d}\right],$$

pues la capacitancia será

$$C_{\text{tot}} = C_1 + C_2 = \frac{a\,x\,\varepsilon_0}{d} + \frac{a\,x\,\varepsilon_0}{d} = \frac{2a\,x\,\varepsilon_0}{d},$$

y el valor máximo se da cuando

$$x = a$$

Distribución de puntaje

- [+0,1] por determinar la capacitancia de un capacitor de placas paralelas
- [+0,6] por determinar las capacitancias requerida de la configuración 3a (+0,2 por cada una independiente C_1, C_2, C_3)
- [+0,3] Por determinar la capacitancia total de la figura, el rango de la capacitancia a partir del rango de x.
- [+0,2] por determinar las capacitancias de la figura 3b, justificado.
- [+0,3] por determinar el nuevo rango de capacitancias de la figura 3b. y compara (justificando) con el resultado anterior. 1— 1—
- Se descuenta [0.1] por cada error conceptual o pasos sin justificación pertinente.

4. Pregunta 4 (1.5 puntos)

4.1. Vía directa

Sea la ley de de coulomb para cargas puntuales:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2}\hat{r}$$

El campo se calcula como:

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2}\hat{r}$$

El campo a una distancia a es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi a^2}\hat{r}$$

Se puede calcular el flujo del campo en una esfera de radio ."a"de dos formas: Mediante divergencia:

$$\int_S \vec{E}\ dS = \int_V \nabla \cdot \vec{E}\ dV$$

Como la carga puntual es simétrica y el campo en electrostática tiene rotacional nulo y E//$\hat{r}$ podemos decir:

$$\int_S \vec{E}\ dS = E \cdot A$$

Por lo que se tiene

$$\int_S \vec{E}\ dS = \int_S \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2}\hat{r}\ dS = \frac{Q \cdot 4\pi r^2}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Uniendo ambas partes:

$$\int_S \vec{E}\ dS = \int_V \nabla \cdot \vec{E}\ dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Derivamos respecto al volumen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dV}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

4.2. Derivación directa

Notación: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ es el vector desde la carga (en $\vec{r}\,'$) hasta el punto de campo (en $\vec{r}$), y $R = |\vec{R}|$.

Por Coulomb y superposición, para una distribución $\rho(\vec{r}\,')$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{R}}{R^2}\,\rho(\vec{r}\,')\,d^3r'$$

La divergencia deriva respecto a $\vec{r}$ (el punto de campo), y $\rho(\vec{r}\,')$ depende solo de $\vec{r}\,'$. Por tanto la divergencia entra en la integral y actúa solo sobre $\hat{R}/R^2$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) \rho(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

Todo se reduce a calcular $\nabla \cdot \left(\hat{R}/R^2 \right)$.

Tomando el origen en $\vec{r}\,'$, el campo $\hat{R}/R^2$ es radial. En coordenadas esféricas:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \cdot \frac{1}{R^2} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}(1) = 0 \qquad (R \neq 0)$$

Parece que la divergencia es cero en todas partes, pero esto contradice el flujo. Por el teorema de la divergencia, sobre una esfera de radio a centrada en el origen:

$$\oint \frac{\hat{R}}{R^2} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi$$

Si la divergencia fuera cero en todo punto, la integral de volumen daría 0, no 4π. La falla está en $R = 0$, donde el campo es singular y la fórmula del paso 3 no se puede aplicar.

Resumimos lo que sabemos de la función $\nabla \cdot (\hat{R}/R^2)$:

- Vale 0 en todo punto salvo el origen (paso 3).
- Su integral sobre cualquier volumen que contiene el origen vale 4π, sin importar el tamaño del volumen (paso 4).

Estas son exactamente las propiedades de 4π veces la delta de Dirac tridimensional $\delta^3(\vec{R})$, que se define por:

$$\delta^3(\vec{R}) = 0 \;\; (\vec{R} \neq 0), \qquad \int \delta^3(\vec{R})\, d^3R = 1$$

Por tanto:

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) = 4\pi\, \delta^3(\vec{R})}$$

Reemplazamos en el paso 2, con $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')\, d^3r' = \frac{1}{\epsilon_0} \int \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

La delta "filtra" el valor de ρ en el punto $\vec{r}\,' = \vec{r}$:

$$\int \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')\, f(\vec{r}\,')\, d^3r' = f(\vec{r})$$

Entonces:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$$

Distribución de puntaje

- [+0,5] Justifica adecuadamente los pasos
- [+1] Desarrollo
- Se descuenta [0.25] por cada error conceptual (justificación), si hay arrastre queda a criterio el descuento dependiendo de la magnitud de este.