PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Control 2

Duración: 60 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla. Específicamente, se descontará 1 décima por minuto.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su control y cargarlo** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Control 2". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después de terminar el tiempo de desarrollo del control.
- **Debe entregar la prueba física antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad**.
- Está permitido el uso de **calculadora no programable**.
- Está **prohibido el uso de otros dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la evaluación. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su evaluación a CANVAS.
- Debe escribir con **lápiz pasta**.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

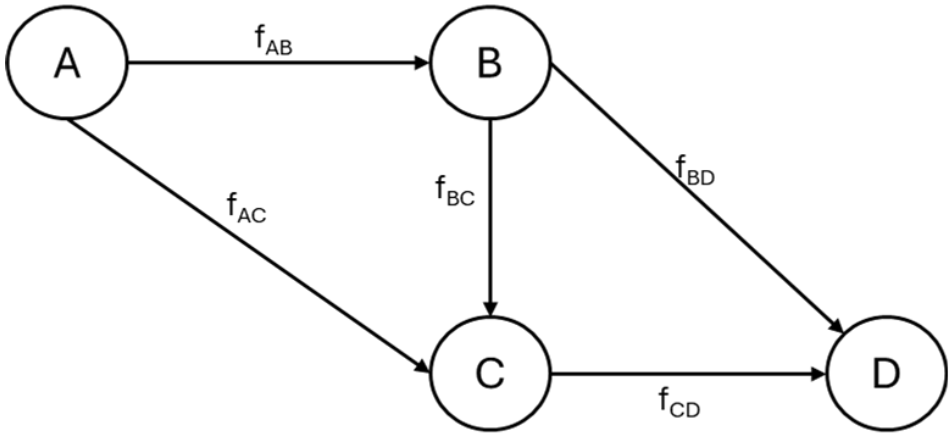
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Control 2
Duración: 60 minutos.

Pregunta 1 (30 puntos)

Considere la red a continuación, que ilustra un problema de equilibrio de tráfico:



Existen dos pares origen-destino con las siguientes demandas: 100 viajes/hora entre el nodo A y D, y 100 viajes/hora entre el nodo A y C. Se ha encontrado con la siguiente función objetivo del problema de optimización equivalente:

$$min \quad Z = 2 \cdot f_{AB} + 2 \cdot f_{AB}^2 + 6 \cdot f_{AC} + f_{AC}^2 + 4 \cdot f_{BC} + f_{BD}^2 + 4 \cdot f_{CD} + 2 \cdot f_{CD}^2$$

A partir de esta información, se le pide que conteste las siguientes preguntas:

(a) **(6 puntos)** Identifique las funciones de costos de cada uno de los arcos de la red.
Solución:

Se deriva Z con respecto a los flujos de arco y se obtiene:

$$c_{AB} = 2 + 4f_{AB}$$
$$c_{AC} = 6 + 2f_{AC}$$
$$c_{BC} = 4$$
$$c_{BD} = 2f_{BD}$$
$$c_{CD} = 4 + 4f_{CD}$$

Puntaje: [1 punto por mostrar que la derivada de la función Z con respecto al flujo equivale a los costos de arco. 5 puntos por obtener las funciones de costo correctamente, 1 punto por cada función]

(b) **(6 puntos)** Escriba las restricciones de factibilidad de este problema de optimización equivalente.
Solución:

$$\begin{aligned} f_{AB} &= h_{ABD} + h_{ABCD} + h_{ABC} \\ f_{AC} &= h_{ACD} + h_{AC} \\ f_{BC} &= h_{ABCD} + h_{ABC} \\ f_{BD} &= h_{ABD} \\ f_{CD} &= h_{ABCD} + h_{ACD} \\ h_{ABD} + h_{ABCD} + h_{ACD} &= 100 \\ h_{AC} + h_{ABC} &= 100 \\ h_{ABC}, h_{ABD}, h_{ABCD}, h_{ACD}, h_{AC} &\geq 0 \end{aligned}$$

Puntaje: [3 puntos por escribir correctamente las restricciones de flujo en arco; 2 puntos por escribir las restricciones de cumplimiento de demanda; 1 punto por escribir la restricción de no negatividad].

(c) **(6 puntos)** Determine si puede asegurar que este problema tiene solución única en términos de flujo en arco. Justifique adecuadamente y para el caso específico de este problema.

Solución:

El jacobiano de los costos es el siguiente:

$$J(C) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Como hay un 0 en la diagonal, la matriz es semi-definida positiva y, por ende, no podemos asegurar una única solución.

Puntaje: [1 punto por obtener el Jacobiano; 2 puntos por decir que al haber un 0 en la diagonal la matriz es semi-definida positiva; 3 puntos por concluir que no se puede asegurar solución única (aunque puede haberla)].

(d) **(6 puntos)** Utilice directamente el principio de **Wardrop** para evaluar si la asignación $\left(f_{AB}, f_{AC}, f_{BC}, f_{BD}, f_{CD}\right) = (67{,}33;\ 132{,}67;\ 0;\ 67{,}33;\ 32{,}67)$ es un equilibrio. Puede redondear a un decimal.

Solución:

Para esto, tenemos que revisar que los costos de las distintas rutas utilizadas para cada par origen destino tengan el mismo costo, y los no utilizados tengan un costo mayor o igual.

Para el par A-D tenemos tres rutas:

$$\begin{aligned} h_{ABD} &= 67,33 \\ h_{ABCD} &= 0 \\ h_{ACD} &= 32,67 \end{aligned}$$

Esperamos entonces que:

$$C_{ABD} = C_{ACD} \leq C_{ABCD}$$

Revisamos los costos:

$$c_{AB} = 2 + 4f_{AB} = 271,33$$
$$c_{AC} = 6 + 2f_{AC} = 271,33$$
$$c_{BC} = 4$$
$$c_{BD} = 2f_{BD} = 134,67$$
$$c_{CD} = 4 + 4f_{CD} = 134,67$$

$$C_{ABD} = c_{AB} + c_{BD} = 406$$
$$C_{ACD} = c_{AC} + c_{CD} = 406$$
$$C_{ABCD} = c_{AB} + c_{BC} + c_{CD} = 410$$

Para el par A-C tenemos dos rutas:

$$h_{AC} = 100$$
$$h_{ABC} = 0$$

Esperamos entonces que:

$$C_{AC} \leq C_{ABC}$$

Revisamos los costos:

$$C_{AC} = c_{AC} = 271,3$$
$$C_{ABC} = c_{AB} + c_{BC} = 275,3$$

Se cumplen en ambos pares OD, por lo que es un equilibrio según el principio de Wardrop.

Puntaje: [1 punto por obtener los costos para las rutas entre el par A-D; 2 puntos por concluir que los costos C_{ABD} y C_{ACD} son iguales (que son los que llevan flujo), mientras que C_{ABCD} es mayor por lo que se cumple Wardrop.
1 punto por obtener los costos para las rutas entre el par A-C; 2 puntos por concluir que el costo de C_{AC} es menor a C_{ABC} por lo que se cumple Wardrop].

(e) **(6 puntos)** Utilice directamente el principio de **Smith** para evaluar si la asignación $(f_{AB}, f_{AC}, f_{BC}, f_{BD}, f_{CD}) = (100; 100; 0; 100; 0)$ es un equilibrio. Note que no se considerará bien si utiliza otro principio (como, por ejemplo, Wardrop). Puede redondear a un decimal.

Solución:

Revisamos los costos por arco de la asignación de flujos a analizar:

$$c_{AB} = 2 + 4f_{AB} = 402$$
$$c_{AC} = 6 + 2f_{AC} = 206$$
$$c_{BC} = 4$$
$$c_{BD} = 2f_{BD} = 200$$
$$c_{CD} = 4 + 4f_{CD} = 4$$

Con esto, calculamos el costo total de la red:

$$C_T^0 = \sum_{a \in A} c_a^0 f_a^0 = 80,800$$

Con estos costos, vamos a analizar (cualquier) cambio lógico en la asignación de flujos factible (en dirección hacia el equilibrio anterior - si no sabemos cuál es el equilibrio deberíamos probar en distintas direcciones, como visto en clases, y fijándonos en los costos de los arcos): $f_a^1 = (f_{AB}, f_{AC}, f_{BC}, f_{BD}, f_{CD}) = (0; 200; 0; 0; 100)$ Y calculamos el costo total con los costos anteriores pero estos nuevos flujos:

$$C_T^1 = \sum_{a \in A} c_a^0 f_a^1 = 402 \cdot 0 + 206 \cdot 200 + 4 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 4 \cdot 100 = 41,600$$

Que es menor, por lo que esta asignación no es un equilibrio fundamentado de acuerdo al principio de Smith.

Puntaje: [1 punto por obtener los costos con los flujos dados y el costo total de la red; 3 puntos por calcular el costo total de Smith a partir de nuevos flujos de arco y los costos anteriores (debe analizar un cambio lógico, i.e., en dirección hacia el equilibrio o, si no, más de uno representando todas las posibles direcciones de movimiento. Solo tendrá puntos el del cambio "lógico"); 2 puntos por concluir que no se cumple el principio de Smith dado que los costos totales de Smith mejoraron ante este cambio (cualquier otra razón, por ejemplo, Wardrop, no tendrá puntaje)].

Pregunta 2 (30 puntos)

Ahora, usted está analizando una red con un solo par de nodos y tres arcos (rutas) que los unen. La demanda entre el par de nodos es de 10 viajes/hora, y las funciones de costo de los arcos son las siguientes:

$$c_1 = 30 + f_1^2$$
$$c_2 = 10 + 2 \cdot f_2^2$$
$$c_3 = 20 + f_3^2$$

Usted se encuentra en su tercera iteración de Frank-Wolfe, y tiene la siguiente información:

- Asignación flujos inicial:

$$x_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,40 \\ 3,42 \\ 4,18 \end{pmatrix}$$

- Dirección de movimiento:

$$d_4 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,40 \\ 6,58 \\ -4,18 \end{pmatrix}$$

Por favor, conteste las siguientes preguntas utilizando dos decimales.

(a) **(8 puntos)** Encuentre la cota superior de esta iteración.

Solución:

La cota superior entonces corresponde a la función objetivo del problema de optimización equivalente:

$$\begin{aligned} Z(f_4) &= \sum_a \left(\alpha_a x_{a,4} + \tfrac{1}{3}\beta_a x_{a,4}^3\right) \\ &= 245,42 \end{aligned}$$

Puntaje: [2 puntos por decir cómo se obtiene la cota superior a partir de la función objetivo; 4 puntos por desarrollar la expresión y reemplazar con los valores de x_4; 2 puntos por llegar al resultado correcto].

(b) **(10 puntos)** Encuentre la cota inferior de esta iteración.

Solución:

La cota inferior de esta iteración es igual a:

$$\begin{aligned} Z_L^4(y_4) &= Z(f_4) + \sum_a \left(\alpha_a + \beta_a x_{a,4}^2\right) \cdot d_{a,4} \\ &= 222,69 \end{aligned}$$

Puntaje: [2 puntos por decir cómo se obtiene la cota inferior a partir de la función objetivo, las funciones de costo y la dirección de descenso; 6 puntos por desarrollar la expresión y reemplazar con los valores de x_4 y d_4; 2 puntos por llegar al resultado correcto].

(c) **(2 puntos)** Usted está trabajando con un criterio de parada que permite un error del 5 % entre cotas. ¿Seguiría iterando? Asuma que la cota inferior de esta iteración es la mejor cota inferior encontrada hasta ahora.

Solución:

Para esto, buscamos el GAP entre estas cotas:

$$GAP = \frac{245,42 - 222,69}{245,42} = 9,26$$

Como el GAP es mayor al 5 %, sí seguiría iterando.

Puntaje: [1 punto por plantear cómo se obtiene el GAP y reemplazar con los valores de la cota superior e inferior; 1 punto por llegar al resultado correcto y concluir que se debe seguir iterando].

(d) **(10 puntos)** Encuentre la asignación de flujos para la cuarta iteración. Hint: Se recomienda calcular primero la fórmula para λ, sin utilizar los vectores dados.

Solución:

La asignación de la próxima iteración viene dada por:

$$x_5 = \begin{pmatrix} x_1 + d_1 \cdot \lambda \\ x_2 + d_2 \cdot \lambda \\ x_3 + d_3 \cdot \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,40 - 2,40 \cdot \lambda \\ 3,42 + 6,58 \cdot \lambda \\ 4,18 - 4,18 \cdot \lambda \end{pmatrix}$$

Ya que tenemos la asignación actual y la dirección de movimiento, lo único que nos falta es encontrar el λ que minimiza la función objetivo. Para esto, hacemos minimización unidimen-

sional, donde ahora tenemos costos por arco de la forma: $\alpha_a + \beta_a \cdot f_a^2$:

$$
\begin{aligned}
C(f_5(\lambda_4))^T\, d_4 = C(f_4 + \lambda_4 d_4)^T\, d_4 &= 0 \\
\sum_a \Big(\alpha_a + \beta_a \cdot (x_{a,4}^2 + 2\lambda_4 d_{a,4} x_{a,4} + \lambda_4^2 d_{a,4}^2)\Big) d_{a,4} &= 0 \\
\sum_a \Big[\lambda_4^2 \beta_a d_{a,4}^3 + \lambda_4 2\beta_a d_{a,4}^2 x_{a,4} + (\alpha_a + \beta_a x_{a,4}^2) d_{a,4}\Big] &= 0 \\
A = \sum_a \big[\beta_a d_{a,4}^3\big] &= -127.924 \\
B = 2\sum_a \big[\beta_a d_{a,4}^2 x_{a,4}\big] &= 640.782 \\
C = \sum_a \big[(\alpha_a + \beta_a x_{a,4}^2) d_{a,4}\big] &= -6.853
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 0,03
$$

$$
\Rightarrow \quad x_5 = \begin{pmatrix} x_{AB} \\ x_{AC} \\ x_{BC} \\ x_{BD} \\ x_{CD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,33 \\ 3,62 \\ 4,05 \end{pmatrix}
$$

Puntaje: [2 puntos por plantear el vector x_5 en función de x_4, d_4 y λ; 2 puntos por plantear correctamente la expresión para obtener λ; 4 puntos por desarrollar la minimización unidimensional y llegar al valor correcto de λ; 2 puntos por reemplazar λ en el vector x_5 y llegar correctamente a los nuevos flujos].

*Puede serle útil la siguiente fórmula:

$$
Ax^2 + Bx + C = 0
$$

$$
x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}
$$