PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Examen
Duración: 120 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su cuadernillo**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla. Específicamente, se descontará 1 décima por minuto.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su control y cargarlo** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Examen". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después de terminar el tiempo de desarrollo.
- **Debe entregar la prueba física antes de irse**.
- Está permitido el uso de **calculadora no programable**.
- Está **prohibido el uso de otros dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la evaluación. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su evaluación a CANVAS.
- Debe escribir con **lápiz pasta**. Si quiere escribir con lápiz mina, debe asegurarse que en el escaneo se vea su prueba adecuadamente - si no, podrá ser no revisada o tendrá una penalización.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

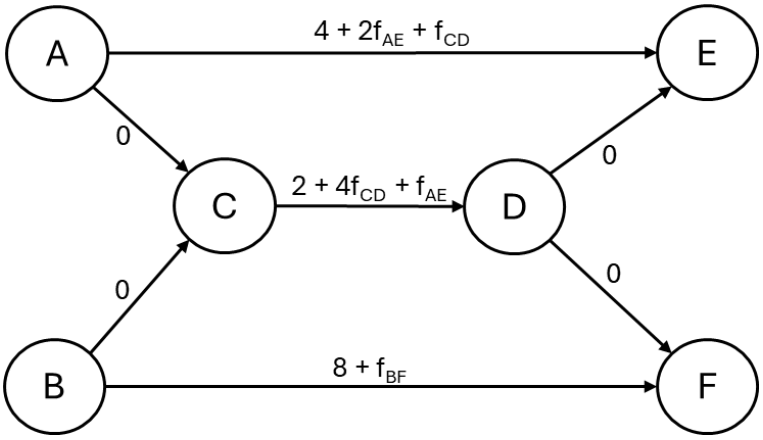
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Examen
Duración: 120 minutos.

Pregunta 1 (20 puntos)

Usted tiene una red de transporte privado. En esta red, existen las siguientes demandas por par origen-destino: $T_{AE} = 90$, $T_{AF} = 10$; $T_{BE} = 10$ y $T_{BF} = 100$ viajes/hora. Sobre cada arco, se indica su función de costos. Note que los costos entre los nodos AC, BC, DE y DF se asumen despreciables y sin congestión por simplicidad.



(a) **(7 puntos)** Escriba el problema de optimización equivalente.

Solución:

$$\text{mín} \quad \frac{1}{2}\left[\int_0^{f_{AE}} (4 + 2x + f_{CD})\,dx + \int_0^{f_{AE}} (4 + 2x)\,dx + \int_0^{f_{CD}} (2 + 4x + f_{AE})\,dx \right.$$
$$\left. + \int_0^{f_{CD}} (2 + 4x)\,dx + \int_0^{f_{BF}} (8 + x)\,dx\right]$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & h_{AE} + h_{CDE} = 90 \\
& h_{ACDF} = 10 \\
& h_{BCDE} = 10 \\
& h_{BCDF} + h_{BF} = 100 \\
& f_{AE} = h_{AE} \\
& f_{AC} = h_{ACDE} + h_{ACDF} \\
& f_{CD} = h_{ACDE} + h_{ACDF} + h_{BCDE} + h_{BCDF} \\
& f_{DE} = h_{ACDE} + h_{BCDE} \\
& f_{BC} = h_{BCDE} + h_{BCDF} \\
& f_{DF} = h_{ACDF} + h_{BCDF} \\
& f_{BF} = h_{BF} \\
& h_p, f_a \geq 0 \qquad \text{(para todas las variables } h \text{ y } f\text{)}
\end{aligned}
$$

Puntaje: [3 puntos por plantear correctamente la función objetivo; 4 puntos por plantear las restricciones y variables del problema].

(b) **(8 puntos)** Determine si la siguiente asignación factible representa un equilibrio de tráfico:

$$(h_{AE}; h_{ACDE}; h_{ACDF}; h_{BCDE}; h_{BCDF}; h_{BF})^* = (82; \quad 8; \quad 10; \quad 10; \quad 0; \quad 100)$$

Solución:

Si es un equilibrio de mercado:

Equilibrio Wardrop		**Costo**	**Flujo**
Par AE	Ruta directa	196.00	82.00
	Ruta por CD	196.00	8.00
Par BF	Ruta directa	108.00	100.00
	Ruta por CD	196.00	0

Puntaje: [2 puntos por obtener los costos con la asignación dada; 2 puntos por revisar si se cumple Wardrop en el par AE; 2 puntos por revisar si se cumple Wardrop en el par BF; 2 puntos por concluir que se cumple Wardrop].

(c) **(5 puntos)** Le dicen ahora que las demandas entre los pares T_{AE} y T_{BF} no son fijas y tienen las siguientes funciones:

- $T_{AE} = A - 4 \cdot C_{AE}$
- $T_{BF} = B - 6 \cdot C_{BF}$

Determine qué valores tienen que tomar A y B para que la asignación factible entregada en el inciso (b) cumpla con las condiciones de optimalidad para la curva de demanda.

Solución:

Lo que tenemos que ver es qué valores debe tomar A y B para que se cumpla la relación entre costo y demanda de la asignación entregada en el inciso anterior. Es decir, la asignación que

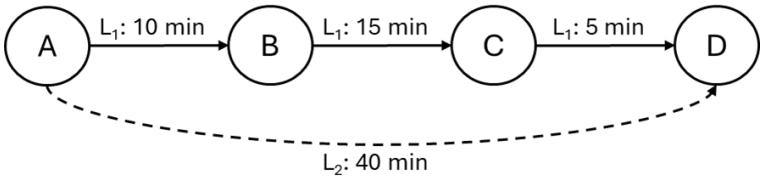
implica las siguientes demandas entre par OD: $T_{AE} = 90$ y $T_{BF} = 100$, y los siguientes costos mínimos de las rutas: $C_{AE} = 196$ y $C_{BF} = 108$.

$$A = T_{AE} + 4 \cdot C_{AE} = 90 + 196 \cdot 4 = 874$$
$$B = T_{BF} + 6 \cdot C_{BF} = 100 + 108 \cdot 6 = 748$$

Estos tendrían que ser los valores de A y B para que la asignación anterior cumpla las condiciones de optimalidad de la curva de demanda.
Puntaje: [3 puntos por evaluar en las funciones de demanda la asignación; 2 puntos por encontrar los valores de A y B].

Pregunta 2 (20 puntos)

Considere la siguiente red de transporte público, donde los buses llegan a las paradas siguiendo un proceso de Poisson. Sobre los arcos, se indica el número de cada línea (servicio) y su tiempo de viaje en vehículo expresado en minutos. En esta red, tenemos viajes que se originan en A hacia B, C y D, cuyas demandas son: T_{AB}, T_{AC} y T_{AD} (en pasajeros por hora), y viajes que se originan de B hacia C y D, cuyas demandas son: T_{BC} y T_{BD} (en pasajeros por hora).



Asuma que los usuarios minimizan su tiempo total de viaje (espera y en el vehículo) por itinerario (i.e., no considere líneas comunes) y que no hay un costo adicional por transbordar. Además, considere que los usuarios descartan aquellos itinerarios que tienen más transbordos de lo necesario.
La capacidad de cada bus es de 60 personas. Como visto en clases, el tiempo de espera para la sección de línea l se puede expresar como:

$$w_l = \frac{\alpha}{f_l} + \beta \cdot \left(\frac{v_l + \tilde{v}_l}{K_l} \right)^n$$

donde, por ejemplo, K_l representa la capacidad de la sección de línea (en personas por hora), y $\tilde{v}_l$ representa el flujo compitente o que le quita capacidad (en pasajeros por hora). Asuma un $n = 1$ y un $\beta = 1$ (en minutos). Las líneas tienen las siguientes frecuencias:

- L_1: 10 buses/hora ——
- L_2: 20 buses/hora - - -

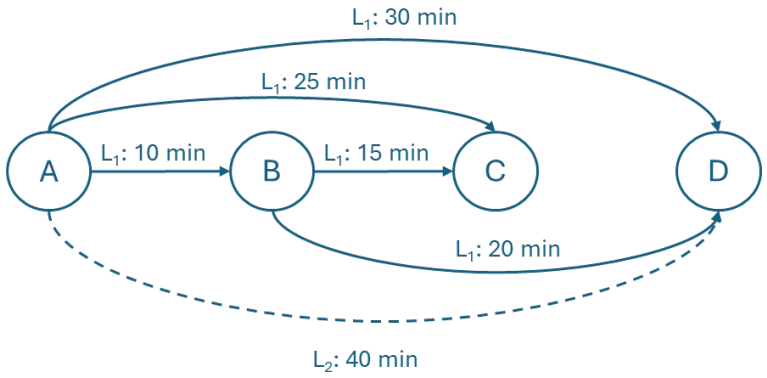
(a) **(10 puntos)** Identifique los costos (tiempos de viaje y espera) asociados a cada itinerario (descartando los que tienen más transbordos de lo necesario) en función de los flujos de los arcos. Relacione los flujos de los arcos con las demandas por pares OD (dadas en el enunciado, que debe considerar como dato del problema).

Solución:

Los itinerarios considerados para las demandas son:

- ◇ A a B: L1 entre AB
- ◇ A a C: L1 entre AC
- ◇ A a D hay dos itinerarios: 1) L1 entre AD; 2) L2 entre AD
- ◇ B a C: L1 entre BC
- ◇ B a D: L1 entre BD

La red de secciones de línea relevante para estos itinerarios se ve así:



Los tiempos de espera en cada nodo para cada línea relevante son:

$$w_A^{L1} = \frac{60}{10} + \left(\frac{v_{AB1} + v_{AC1} + v_{AD1}}{60 \cdot 10}\right) = 6 + \left(\frac{v_{AB1} + v_{AC1} + v_{AD1}}{600}\right)$$
$$w_B^{L1} = \frac{60}{10} + \left(\frac{v_{BC1} + v_{BD1} + v_{AC1} + v_{AD1}}{60 \cdot 10}\right) = 6 + \left(\frac{v_{BC1} + v_{BD1} + v_{AC1} + v_{AD1}}{600}\right)$$
$$w_A^{L2} = \frac{60}{20} + \left(\frac{v_{AD2}}{60 \cdot 20}\right) = 3 + \left(\frac{v_{AD2}}{1200}\right)$$

Con esto, los costos para cada itinerario son los siguientes:

$$c_{AB}^{L1} = 10 + w_A^{L1} = 16 + ...$$
$$c_{AC}^{L1} = 25 + w_A^{L1} = 31 + ...$$
$$c_{AD}^{L1} = 30 + w_A^{L1} = 36 + ...$$
$$c_{BC}^{L1} = 15 + w_B^{L1} = 21 + ...$$
$$c_{BD}^{L1} = 20 + w_B^{L1} = 26 + ...$$
$$c_{AD}^{L2} = 40 + w_A^{L2} = 43 + ...$$

Podemos relacionar los flujos v en función de las demandas T_{OD}:

$$T_{AB} = v_{AB1}$$
$$T_{AC} = v_{AC1}$$
$$T_{AD} = v_{AD1} + v_{AD2}$$
$$T_{BC} = v_{BC1}$$
$$v_{BD} = v_{BD1}$$

Puntaje: [3 puntos por identificar los itinerarios; 3 puntos por obtener los tiempos de espera

para cada línea; 4 puntos por obtener los costos considerando tiempos de viaje y espera, luego expresar las demandas en función de los flujos por arco].

(b) **(6 puntos)** Escriba el Jacobiano por arco este problema.

Solución:

$$J(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_{AB}^{L1}}{\partial v_{AB1}} & \frac{\partial c_{AB}^{L1}}{\partial v_{AC1}} & \frac{\partial c_{AB}^{L1}}{\partial v_{AD1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial c_{AC}^{L1}}{\partial v_{AB1}} & \frac{\partial c_{AC}^{L1}}{\partial v_{AC1}} & \frac{\partial c_{AC}^{L1}}{\partial v_{AD1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial c_{AD}^{L1}}{\partial v_{AB1}} & \frac{\partial c_{AD}^{L1}}{\partial v_{AC1}} & \frac{\partial c_{AD}^{L1}}{\partial v_{AD1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial c_{BC}^{L1}}{\partial v_{AC1}} & \frac{\partial c_{BC}^{L1}}{\partial v_{AD1}} & \frac{\partial c_{BC}^{L1}}{\partial v_{BC1}} & \frac{\partial c_{BC}^{L1}}{\partial v_{BD1}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial c_{BD}^{L1}}{\partial v_{AC1}} & \frac{\partial c_{BD}^{L1}}{\partial v_{AD1}} & \frac{\partial c_{BD}^{L1}}{\partial v_{BC1}} & \frac{\partial c_{BD}^{L1}}{\partial v_{BD1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial c_{AD}^{L2}}{\partial v_{AD2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{600} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Puntaje: [Identificar correctamente las derivadas parciales entre los distintos costos de los pares OD (1 punto por cada fila)].

(c) **(4 puntos)** Indique si este problema de equilibrio posee un problema de optimización equivalente. En caso afirmativo, plantee la función objetivo específica de este problema. En caso contrario, indique en palabras cómo resolvería este problema.

Solución:

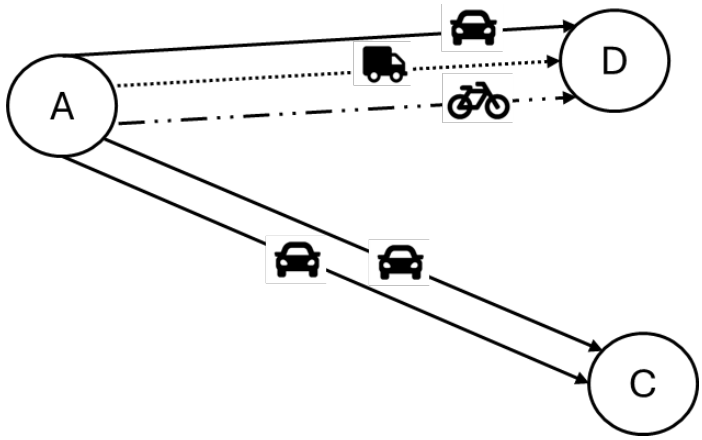
No es simétrico, por lo que no tiene problema de optimización equivalente (por ejemplo, v_{AC1} influye en el costo de v_{BC1} pero no al revés). Resolvería con el algoritmo de diagonalización.
Puntaje: [2 puntos por mencionar que no hay problema de optimización equivalente ya que la red no es simétrica; 2 puntos por mencionar el algoritmo de diagonalización].

Pregunta 3 (20 puntos)

Sobre la red que se presenta abajo se desea resolver un problema combinado de distribución, partición modal y asignación, bajo los siguientes supuestos:

- ◇ El nodo A genera un flujo de 150 viajes/hora, que se distribuyen entre los nodos C y D (sin atractividades) y con parámetro de escala $\beta = 0.1$.
- ◇ Entre el par A-D hay viajes en auto, camión y bicicleta; para el par A-C hay viajes en auto solamente.
- ◇ Entre el par A-C existen dos rutas disponibles para el modo auto.

- ◇ El problema de partición modal entre A-D se puede modelar como un logit jerárquico, donde la elección entre bicicleta o modos motorizados tiene un parámetro $\lambda = 0.5$. La elección entre modos motorizados (auto o camión) tiene un parámetro $\gamma = 1$.
- ◇ La asignación de usuarios a las rutas disponibles en cada modo se puede modelar como un logit multinomial con parámetro $\rho = 1.5$.
- ◇ Cada modo de transporte circula en vías exclusivas.
- ◇ El tiempo de viaje en minutos de cada modo por arco k está definido por $t_k^m = A_k^m + B_k^m \cdot x_k$. Los valores del tiempo de viaje a flujo libre en minutos A, y el parámetro B por modo están dados en la tabla de más abajo. x_k representa el flujo total del tramo (para cada tipo de vehículo).



	A	B
AD – Auto	6	2
AD – Bicicleta	10	1
AD – Camión	8	4
AC1 – Auto	4	4
AC2 – Auto	6	1

(a) **(6 puntos)** Plantee las variables y restricciones que definen un flujo factible en este problema de equilibrio específico.

Solución:

Auto = a
Bicicleta = b
Camión = c
Motorizado = mot

Las restricciones son:

$$
\begin{aligned}
150 &= T_{AC} + T_{AD} \\
T_{AC} &= T^a_{AC} \\
T^a_{AC} &= h^a_{AC1} + h^a_{AC2} \\
T^b_{AC} &= h^b_{AC} \\
T_{AD} &= T^{mot}_{AD} + T^b_{AD} \\
T^{mot}_{AD} &= T^a_{AD} + T^c_{AD} \\
T^a_{AD} &= h^a_{AD} \\
T^b_{AD} &= h^b_{AD} \\
h &\geq 0
\end{aligned}
$$

Es importante también mencionar que los flujos en arco son iguales a los flujos en ruta en este caso $F = H$, ya que usaremos nomenclatura por arco más abajo mezclada con ruta.

Puntaje: [2 puntos por las restricciones de asignación (demanda par-modo). 2 puntos por restricciones asociadas a distribución (generación). 2 puntos por restricciones asociadas a partición modal. No es problema si agregan más variables de decisión, siempre y cuando se fijen en 0. Por ejemplo, $T^b_{AC} = 0$]

(b) **(8 puntos)** Indique justificadamente si este problema tiene un problema de optimización equivalente. En caso de ser así, escriba la función objetivo del problema de optimización equivalente para este caso particular (no es necesario que desarrolle las integrales).

Solución:

$$
\begin{aligned}
\text{mín } \mathbf{Z} = &\int_0^{f^a_{AD}} (6 + 2x)\, dx \; + \; ... + \; \frac{1}{0.1}\Big[T_{AC}(\ln T_{AC} - 1) + T_{AD}(\ln T_{AD} - 1)\Big] \\
&+ \; \frac{1}{0.5}\Big[T^{mot}_{AD}(\ln T^{mot}_{AD} - 1) + T^b_{AD}(\ln T^b_{AD} - 1) - T_{AD}(\ln T_{AD} - 1)\Big] \\
&+ \; \frac{1}{1}\Big[T^a_{AD}(\ln T^a_{AD} - 1) + T^c_{AD}(\ln T^c_{AD} - 1) - T^{mot}_{AD}(\ln T^{mot}_{AD} - 1)\Big] \\
&+ \; \frac{1}{1.5}\Big[h^a_{AC1}(\ln h^a_{AC1} - 1) + h^a_{AC2}(\ln h^a_{AC2} - 1) - T_{AC}(\ln T_{AC} - 1)\Big].
\end{aligned}
$$

Puntaje: [3 puntos por los términos asociados a la asignación (1 pto por Beckmann y 2 pts por MNL); 2 puntos por términos asociados a la distribución; 3 puntos por los términos asociados a partición modal (1.5 pts motorizado vs bicicleta, 1.5 pts nido motorizado). Es fundamental que sean consistentes con los términos que utilicen arriba, y que la formulación sea específica al problema. Si agregan términos adicionales, no es problema siempre y cuando se hayan definido adecuadamente arriba (por ejemplo, si hacen un nido "bicicleta", que arriba aparezca que ese nido sólo tiene la demanda de bicicleta y, por ende, sería igual a 0).]

(c) **(6 puntos)** Considere la siguiente asignación factible:

$$\left(h^a_{AD}; h^b_{AD}; h^c_{AD}; h^a_{AC1}; h^a_{AC2}\right)^* = (25,6; \quad 46,4; \quad 12,5; \quad 13,7; \quad 51,9)$$

Se le pide indicar si esta cumple con las condiciones de optimalidad de partición modal (entre A-D) y de asignación de rutas (entre A-C) solamente. En su análisis, permita un error de redondeo de 1.

*Note que las letras en el subíndice de las asignaciones por ruta entregadas representan los nodos por los que pasa esa ruta. Por ejemplo, la ruta ACDE (h_{ACDE}) representa una ruta entre el par A-E que pasa por C y D. Si hay dos rutas entre el mismo par OD para el mismo modo de transporte m, estas serán referidas como $h^m_{AC\#}$ con # representando el número de ruta (consistente con los costos entregados).

Solución:

Sumando los flujos correspondientes de la asignación factible, deducimos que:

$$T_{AD} = 84,5$$

$$T^{mot}_{AD} = 38,1$$

$$T^a_{AD} = 25,6$$

$$T^b_{AD} = 46,4$$

$$T^c_{AD} = 12,5$$

$$T_{AC} = 65,6$$

$$T^a_{AC} = 65,6$$

i) Asignación de rutas para A-D:

$$h^a_{AC1} = T^a_{AC} \frac{e^{-1.5C^a_{AC1}}}{e^{-1.5C^a_{AC1}} + e^{-1.5C^a_{AC2}}}$$

Con:

$$C^a_{AC1} = 4 + 4 \cdot 13,7 = 58,8$$
$$C^a_{AC2} = 6 + 51,9 = 57,9$$

Y reemplazando:

$$h^a_{AC1} = 13,5$$

Obtenemos h^a_{AC2}:

$$h^a_{AC1} + h^a_{AC2} = T^a_{AC}$$
$$h^a_{AC2} = 65,6 - 13,5 = 52,1$$

Al comparar la condición de optimalidad con los flujos entregados, vemos que sí cumple (error de redondeo menor a 1).

ii) Partición modal para A-C:

- Rama motorizada:

$$T_{AD}^{a} = T_{AD}^{mot} \frac{e^{-C_{AD}^{a}}}{e^{-C_{AD}^{a}} + e^{-C_{AD}^{c}}}$$

Con:

$$C_{AD}^{a} = 6 + 2 \cdot 25,6 = 57,2$$
$$C_{AD}^{c} = 8 + 4 \cdot 12,5 = 58$$

Y reemplazando:

$$T_{AD}^{a} = 26,3$$

Obtenemos T_{AD}^{c}:

$$T_{AD}^{c} = T_{AD}^{mot} - T_{AD}^{a}$$
$$T_{AD}^{c} = 38,1 - 26,3 = 11,8$$

Al comparar la condición de optimalidad con la partición modal entregada, vemos que sí cumple (error de redondeo menor a 1).

- Elección de nido (motorizado vs. bicicleta):

$$T_{AD}^{mot} = T_{AD} \frac{e^{-0.5L_{AD}^{mot}}}{e^{-0.5L_{AD}^{mot}} + e^{-0.5C_{AD}^{b}}}$$

En donde L_{AD}^{mot} corresponde al costo esperado de elegir el nido motorizado (el cual se calcula mediante log-suma):

$$L_{AD}^{mot} = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(e^{-\gamma C_{AD}^{a}} + e^{-\gamma C_{AD}^{c}} \right)$$

Calculamos los costos:

$$C_{AD}^{a} = 6 + 2 \cdot 25,6 = 57,2$$
$$C_{AD}^{b} = 10 + 46,4 = 56,4$$
$$C_{AD}^{c} = 8 + 4 \cdot 12,5 = 58$$

Y con esto:

$$L_{AD}^{mot} = 56,8$$

Y reemplazando en la expresión para T_{AD}^{mot} se tiene:

$$T_{AD}^{mot} = 37,7$$

Obtenemos T_{AD}^{b}:

$$T_{AD}^{b} = T_{AD} - T_{AD}^{mot}$$
$$T_{AD}^{b} = 84,5 - 37,3 = 47,2$$

Al comparar la condición de optimalidad con la partición modal entregada, vemos que sí cumple (error de redondeo menor a 1).

Puntaje: [2 puntos por evaluar correctamente la condición de optimalidad de partición modal del nido motorizado. 2 puntos por evaluar correctamente la condición de optimalidad de partición modal entre modos motorizados y bicicleta. 2 puntos por evaluar correctamente la condición de optimalidad de asignación de rutas.]

*Note que las letras en el subíndice de las asignaciones por ruta entregadas representan los nodos por los que pasa esa ruta. Por ejemplo, la ruta ACDE (h_{ACDE}) representa una ruta entre el par A-E que pasa por C y D. Si hay dos rutas entre el mismo par OD para el mismo modo de transporte m, estas serán referidas como $h^m_{AC\#}$ con # representando el número de ruta (consistente con los costos entregados).

Formulario

Esta sección incluye algunas fórmulas del curso que le pueden resultar útiles (no es necesario que las utilice si no le parece adecuado). Esto es una ayuda, se espera que usted sepa qué significan estas fórmulas y las variables asociadas.

$$\text{mín } Z = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} c_a\left(x\right)\, dx$$

$$\text{mín } Z = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} \left(\int_0^{f_a} c_a\left(x, f_{a'}\right)\, dx + \int_0^{f_a} c_a(x, 0)\, dx \right)$$

$$\text{mín } Z = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} s_a\left(x\right)\, dx + \sum_{a \in A} \sum_{k \in K} \theta^k \cdot t_a \cdot f_a^k$$

$$\text{mín } Z = \sum_{w \in W} T_w \left(\ln(T_w) - 1\right)$$