PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Control 3
Duración: 60 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- La evaluación es **individual**.
- En el desarrollo de su control, se espera que usted **resuelva las integrales y derivadas planteadas.**
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla. Específicamente, se descontará 1 décima por minuto.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su control y cargarlo** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Control 3". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después de terminar el tiempo de desarrollo del control.
- **Debe entregar la prueba física antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad**.
- Está permitido el uso de **calculadora no programable**.
- Está **prohibido el uso de otros dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la evaluación. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su evaluación a CANVAS.
- Debe escribir con **lápiz pasta**. Si quiere escribir con lápiz mina, debe asegurarse que en el escaneo se vea su prueba adecuadamente - si no, podrá ser no revisada o tendrá una penalización.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Control 3
Duración: 60 minutos.

Pregunta 1 (16 puntos)

Usted tiene una red con un solo par origen-destino con dos arcos/rutas y una demanda de 10 viajes/hora, que tienen las siguientes funciones de costos:

- $c_1 = 4 + 2f_1 + 2f_2$
- $c_2 = 8 + f_2 + 2f_1$

(a) **(5 puntos)** Escriba el problema de optimización equivalente.

Solución:

$$min \quad Z = f_1^2 + 0.5f_2^2 + 2f_1f_2 + 4f_1 + 8f_2$$

s.a.:

$$f_1 + f_2 = 10$$
$$f_1, f_2 \geq 0$$

Puntaje: [3 puntos por plantear la FO adecuadamente (específico a esta instancia, descontar un punto si no están resueltas las integrales), 1 punto por cada restricción.]

(b) **(4 puntos)** Escriba las condiciones de optimalidad de primer orden que se deben cumplir en el problema del inciso anterior. Note que no se le pide encontrar la asignación de equilibrio, sólo escribir las condiciones para este problema en particular.

Solución:

$$\mathcal{L}(f_1, f_2, \lambda) = f_1^2 + 0.5f_2^2 + 2f_1f_2 + 4f_1 + 8f_2 + \lambda(10 - f_1 - f_2)$$

(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - f_1 - f_2 = 0$

(2) $f_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_1} = f_1(4 + 2f_1 + 2f_2 - \lambda) = 0$

(3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_1} = 4 + 2f_1 + 2f_2 - \lambda \geq 0$

(4) $f_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_2} = f_2(2f_1 + 8 + f_2 - \lambda) = 0$

(5) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_2} = 2f_1 + 8 + f_2 - \lambda \geq 0$

Puntaje: [0.8 puntos por cada condición de optimalidad.]

(c) **(5 puntos)** Indique si puede asegurar una única solución en este problema y encuentre la(las) asignación(es) de equilibrio como usted prefiera.

Solución:

Claramente el jacobiano no es definido positivo. Hay 3 equilibrios, dos estables que son los de los bordes y uno inestable que es cuando los dos arcos son usados.

$$T_w = 10$$

Equilibrio de Wardrop 1 (Inestable):

$$f_1 = 6.00, \quad f_2 = 4.00$$

Costos medios:

$$\begin{aligned} \text{Para } f_1: &\quad \text{Fijo } = 4,\ f_1 = 2,\ f_2 = 2 \\ \text{Para } f_2: &\quad \text{Fijo } = 8,\ f_1 = 2,\ f_2 = 1 \end{aligned}$$

$$c_1 = 24.00, \quad c_2 = 24.00$$

$$CT = 240.00$$

$$\boxed{\text{Equilibrio inestable}}$$

$$T_w = 10$$

Equilibrio de Wardrop 2 (Estable):

$$f_1 = 10.00, \quad f_2 = 0.00$$

Costos medios:

$$c_1 = 24.00, \quad c_2 = 28.00$$

$$CT = 240.00$$

$$\boxed{\text{Equilibrio estable}}$$

$$T_w = 10$$

Equilibrio de Wardrop 3 (Estable):

$$f_1 = 0.00, \quad f_2 = 10.00$$

Costos medios:

$$c_1 = 24.00, \quad c_2 = 18.00$$

$$CT = 180.00$$

Equilibrio estable

Puntaje: [1 punto por concluir que el jacobiano no es definido positivo. 1 punto por la primera solución de equilibrio encontrada; 1.5 puntos por cada una de las dos asignaciones adicionales.]

(d) **(2 puntos)** Discuta si la(las) asignación(es) de equilibrio encontrada(s) en el inciso anterior es(son) un equilibrio estable.

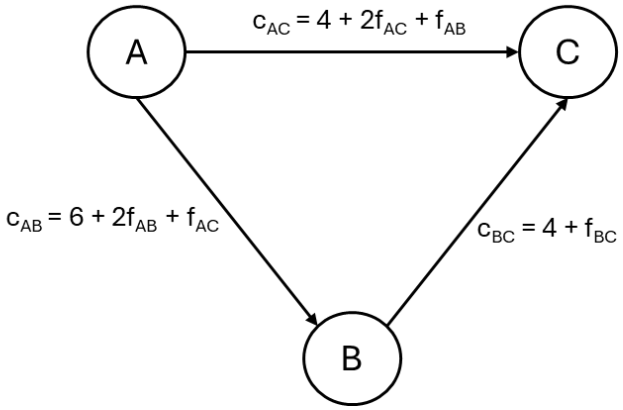
Solución:

Se debe analizar cada equilibrio viendo cómo cambian los costos si una persona se mueve.

Puntaje: [1 punto por identificar la inestable, 1 punto por las inestables.]

Pregunta 2 (20 puntos)

Considere la siguiente red de transporte privado con congestión, donde sobre cada arco se indican sus costos:



Existe una demanda de 20 viajes/hora entre el par A-C y de 5 viajes/hora entre A-B. Además, le indican que el equilibrio de tráfico se encuentra cuando $(f_{AC}; f_{BC}; f_{AB}) = (17; 3; 8)$.

(a) **(8 puntos)** Encuentre la asignación óptima del sistema, y calcule el precio de la anarquía.

Solución:

Equilibrio de Wardrop:
Costos medios:

$$c_{AC} = 46, \quad c_{BC} = 7, \quad c_{AB} = 39$$

$$CT = 1115$$

Óptimo social: Esta red se puede simplificar el problema sabiendo que el par A-B tiene una sola ruta y, por ende: $f_{AB} = 5 + f_{BC}$.

Los costos marginales en cada arco son:

$$cm_{AC} = 4 + 4f_{AC} + 2f_{AB} = 14 + 4f_{AC} + 2f_{BC}$$
$$cm_{BC} = 4 + 2f_{BC}$$
$$cm_{AB} = 6 + 2f_{AC} + 4f_{AB} = 26 + 2f_{AC} + 4f_{BC}$$

Y los costos marginales por rutas serían (nos interesan sólo las de las rutas entre AC):

$$C_{AC} = 14 + 4f_{AC} + 2f_{BC}$$
$$C_{ABC} = c_{AB} + c_{BC} = 30 + 2f_{AC} + 6f_{BC}$$
$$f_{AC} + f_{BC} = 20$$

Igualamos y llegamos a que:

$$f_{AC} = 16, \quad f_{BC} = 4, \quad f_{AB} = 9$$

Costos medios:

$$c_{AC} = 45, \quad c_{BC} = 8, \quad c_{AB} = 40$$

$$CT = 1112$$

Precio de anarquía: 0.27 %

Puntaje: [2 puntos por calcular los costos marginales. 3 puntos por plantear correctamente la condición de equilibrio de Wardrop. (Si se resuelve el problema a través de las condiciones de optimalidad del problema de optimización, también se tienen los 5 puntos anteriores). 2 puntos por encontrar la asignación óptima correcta. 1 punto por calcular el precio de la anarquía.]

(b) **(5 puntos)** Les están pidiendo definir un esquema de tarificación vial para la red anterior, ¿cuál(es) sería(n) el (los) cobro(s) propuesto(s)?

Solución:

Tenemos que restar los costos marginales de los medios en la asignación óptima del sistema: $(f_{AC}; f_{BC}; f_{AB}) = (16; 4; 9)$.

$$\tau_{AC} = cm_{AC} - c_{AC} = 41$$
$$\tau_{BC} = cm_{BC} - c_{BC} = 4$$
$$\tau_{AB} = cm_{AB} - c_{AB} = 34$$

Puntaje: [2 puntos por identificar correctamente que la tarifa óptima es la diferencia entre los costos marginales y los costos medios evaluados en la asignación óptima del sistema. 1 punto por cada tarifa calculada correctamente.]

(c) **(4 puntos)** ¿Qué le diría usted a una persona que afirma que los peajes que actualmente se cobran en autopistas en Santiago son un esquema de tarificación vial? Fundamente su respuesta según lo visto en clases.

Solución:

Se espera una respuesta que explique que estos cobros son para subsidiar la construcción y no pretenden internalizar las externalidades causadas por el uso de la autopista, que su tarifa no se fija para llegar a un óptimo social, y que la recaudación no es reinvertida en el sistema.

Puntaje: [2 puntos si explicita que un esquema de tarificación busca internalizar las externalidades causadas por la congestión o que busca que se llegue al óptimo del sistema/social. 2 puntos si explicita que el peaje busca subsidiar la construcción de la autopista.]

(d) **(3 puntos)** ¿Hay algún cobro que se haga actualmente en Chile que podría considerarse dentro de un esquema amplio de tarificación por el uso de vehículos privados motorizados? Discuta brevemente.

Solución:

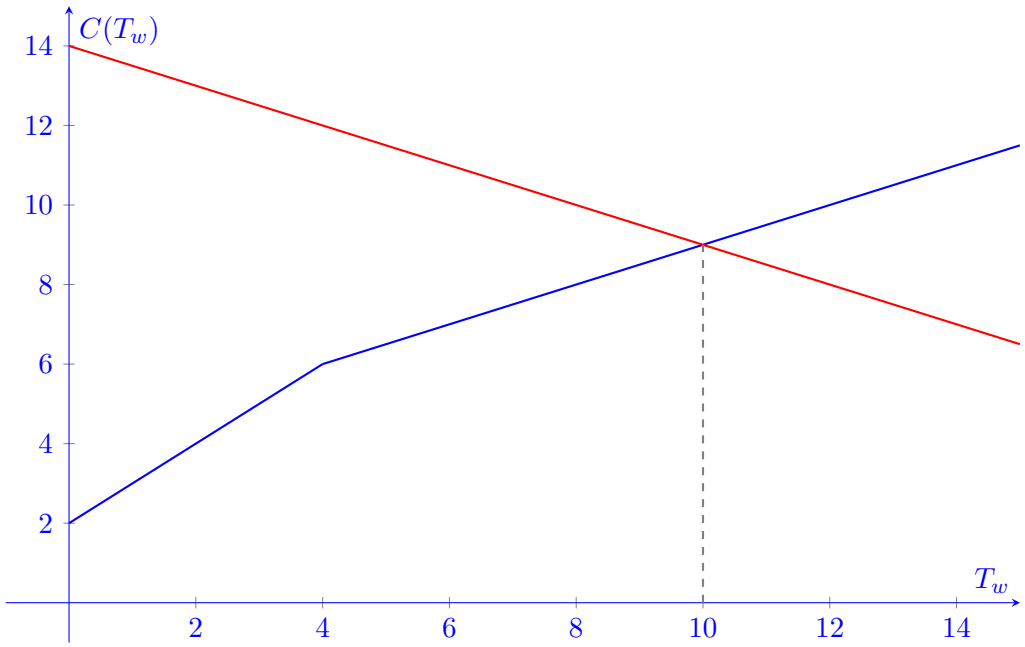
Esto lo discutimos en clases y hablamos del impuesto a la bencina.

Puntaje: [3 puntos por respuesta con justificación adecuada (no es válido por ejemplo el permiso de circulación ya que no hace distinción entre una persona que lo usa más o una que usa su auto menos).]

Pregunta 3 (10 puntos)

Usted tiene una red con un solo par origen-destino con dos arcos/rutas, que tienen las siguientes funciones de costos: $c_1 = 2 + f_1$ y $c_2 = 6 + f_2$. La demanda para el par origen-destino es función de sus costos: $T_w = 28 - 2 \cdot C_w$. Encuentre el equilibrio de mercado gráficamente.

Solución:

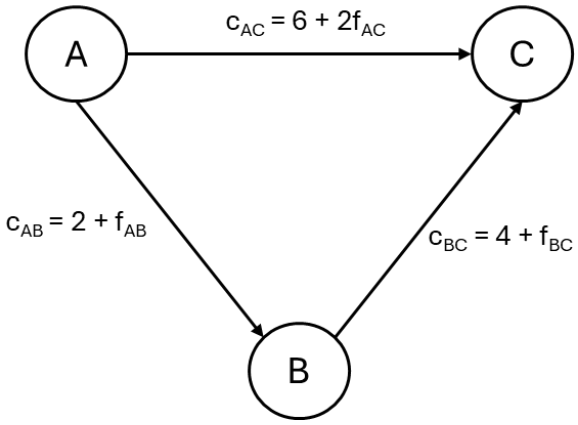


El equilibrio se encuentra cuando $T_w = 10$; $C_w = 9$; $f_1 = 7$ y $f_2 = 3$.

Puntaje: [4 puntos por curva de oferta. 2 puntos por curva de demanda inversa. 4 puntos por encontrar el equilibrio de mercado.]

Pregunta 4 (14 puntos)

Considere ahora la siguiente red de transporte privado, donde sobre los arcos se presentan sus costos:



Existe una demanda entre distintos pares origen-destino de esta red que son funciones del costo del mismo par, como mostrado a continuación:

- $T_{AB} = 14 - 2C_{AB}$
- $T_{AC} = 28 - 2C_{AC}$

(a) **(6 puntos)** Escriba el problema de optimización equivalente para encontrar el equilibrio de mercado de este problema específico considerando demanda variable.

Solución:

Encontramos las funciones inversas de demanda:

$$c_{AB} = \frac{14 - T_{AB}}{2}$$

$$c_{AC} = \frac{28 - T_{AC}}{2}$$

Y podemos escribir el problema equivalente:

$$\begin{aligned} min \quad Z = & \int_0^{f_{AB}} (2 + x)\, dx + \int_0^{f_{AC}} (6 + 2x)\, dx + \int_0^{f_{BC}} (4 + x)\, dx \\ & - \left[\int_0^{T_{AB}} \left(7 - \frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{T_{AC}} \left(14 - \frac{x}{2}\right) dx \right] \\ & = 2f_{AB} + \frac{f_{AB}^2}{2} + 6f_{AC} + f_{AC}^2 + 4f_{BC} + \frac{f_{BC}^2}{2} - \left(7T_{AB} - \frac{T_{AB}^2}{4} + 14T_{AC} - \frac{T_{AC}^2}{4}\right) \end{aligned}$$

s.a.:

$$\begin{aligned} &(1)\ h_{AC} + h_{ABC} = T_{AC} \\ &(2)\ h_{AB} = T_{AB} \\ &(3)\ f_{AB} = h_{AB} + h_{ABC} \\ &(4)\ f_{BC} = h_{ABC} \\ &(5)\ f_{AC} = h_{AC} \\ &(6)\ h_{AC}, h_{ABC}, h_{AB}, T_{AC}, T_{AB} \geq 0 \end{aligned}$$

Puntaje: [4 puntos por función objetivo correcta (específica a la instancia, descontar un punto si las integrales no están resueltas). 2 puntos por restricciones correctas.]

(b) **(8 puntos)** Escriba el problema de optimización equivalente para encontrar el equilibrio de mercado de este problema específico convirtiéndolo en un problema de demanda fija.

Solución:

Encontramos las demandas máximas para cada par origen-destino:

$$c_{AB}^{min} = 2 \longrightarrow T_{AB}^{max} = 14 - 2 \cdot 2 = 10$$

$$c_{AC}^{min} = 6 \longrightarrow T_{AC}^{max} = 28 - 2 \cdot 6 = 16$$

Y las funciones de pseudo-costo son:

$$c_{AB} = \frac{14 - (10 - t_{AB})}{2} = 2 + \frac{t_{AB}}{2}$$

$$c_{AC} = \frac{28 - (16 - t_{AC})}{2} = 6 + \frac{t_{AC}}{2}$$

$$\begin{aligned} min \quad Z = & \int_0^{f_{AB}} (2 + x)\, dx + \int_0^{f_{AC}} (6 + 2x)\, dx + \int_0^{f_{BC}} (4 + x)\, dx \\ & + \int_0^{t_{AB}} \left(2 + \frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{t_{AC}} \left(6 + \frac{x}{2}\right) dx \\ & = 2f_{AB} + \frac{f_{AB}^2}{2} + 6f_{AC} + \frac{f_{AC}^2}{2} + 4f_{BC} + \frac{f_{BC}^2}{2} + 2t_{AB} + \frac{t_{AB}^2}{4} + 6t_{AC} + \frac{t_{AC}^2}{4} \end{aligned}$$

s.a.:

$$\begin{aligned} &(1)\ h_{AC} + h_{ABC} + t_{AC} = 16 \\ &(2)\ h_{AB} + t_{AB} = 10 \\ &(3)\ f_{AB} = h_{AB} + h_{ABC} \\ &(4)\ f_{BC} = h_{ABC} \\ &(5)\ f_{AC} = h_{AC} \\ &(6)\ h_{AC}, h_{ABC}, h_{AB}, t_{AC}, t_{AB} \geq 0 \end{aligned}$$

Puntaje: [1 puntos por encontrar las demandas máximas. 1 punto por las funciones de pseudocosto. 3 puntos por función objetivo correcta (descontar 1 punto si las integrales no están resueltas). 2 puntos por restricciones (1) y (2) correctas, 1 punto por el resto de las restricciones.]