Jueves, 15 de octubre, 2026.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería Civil
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

CONTROL 2

ICT-3283 Equilibrio en Redes de Transporte

Prof. Homero Larrain Izquierdo

Pregunta 1: Responda de acuerdo con lo aprendido en clases:

a. **(5p)** ¿En qué casos se puede resolver un problema de equilibrio de tráfico como un problema equivalente de optimización (P.O.E.)? ¿Cómo se obtiene este P.O.E.? ¿En qué casos no se puede construir un P.O.E., y qué se puede hacer para encontrar el equilibrio en estos casos?

Solución:

De acuerdo con el teorema fundamental de equilibrio, un problema de equilibrio de tráfico se puede plantear como un problema equivalente de optimización cuando el jacobiano de sus funciones de costo es simétrico, es decir, cuando:

$$\frac{\partial c_a}{\partial f_b} = \frac{\partial c_b}{\partial f_a}, \qquad \forall a, b \in A.$$

Este P.O.E. corresponderá a lo siguiente:

$$\min_{F \in \Omega} Z = \oint_o^F c(x)dx.$$

En el problema anterior Ω es el espacio de asignaciones factibles del problema. Equivalentemente, la función Z a minimizar debe ser una función que cumpla que:

$$\frac{\partial Z}{\partial f_a} = c_a(F), \qquad \forall a \in A.$$

Cuando el jacobiano de costos es asimétrico no existe un P.O.E. para el problema de equilibrio de tráfico. En estos casos el equilibro se puede obtener (entre otras formas) aplicando el algoritmo de diagonalización, que en cada iteración aproxima el problema como un problema diagonal, cuyo problema de optimización es conocido (transformada de Beckmann) y puede ser resuelto (entre otras formas) usando el algoritmo de Franke-Wolfe.

b. **(10p)** Como usted ya sabe, un problema de equilibrio con clases de usuario por ingreso puede formularse como un problema equivalente de optimización con la siguiente función objetivo:

$$Z = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} s_a(x)dx + \sum_{a \in A} \sum_{k \in K} \theta_k t_a f_{ak}$$

Indique claramente qué representan θ_k, t_a y $s_a(x)$ en esta fórmula. Muestre, paso por paso, que el jacobiano de Z es el vector de funciones de costo de este problema de equilibrio corresponde a las funciones de costo $c_{ak}(F)$.

Solución:

- θ_k: Inverso del valor del tiempo (en min/$, por ejemplo) de los usuarios de la categoría k.
- t_a: Tarifa del arco a.
- $s_a(x)$: Tiempo de viaje del arco a cuando su nivel de flujo es x.

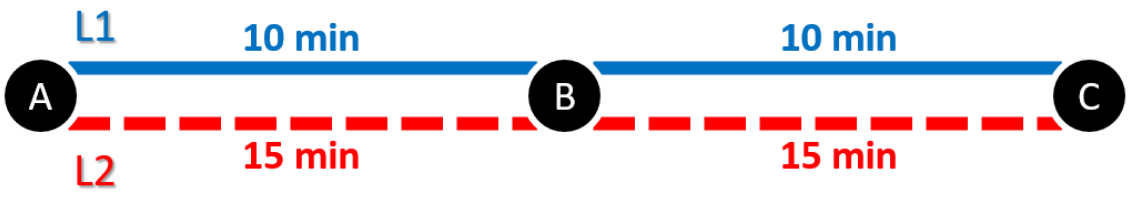
Calculamos las derivadas de Z con respecto al flujo de un arco y de una clase de usuarios:

$$\frac{\partial Z}{\partial f_{ak}} = \frac{\partial}{\partial f_{ak}} \int_0^{f_a} s_a(x)dx \cdot \frac{\partial f_a}{\partial f_{ak}} + \theta_k t_a$$

Dado que $f_a = \sum_k f_{ak}$, podemos concluir que $\partial f_a / \partial f_{ak} = 1$, y, por lo tanto:

$$\frac{\partial Z}{\partial f_{ak}} = s_a(f_a) + \theta_k t_a = c_{ak}(F)$$

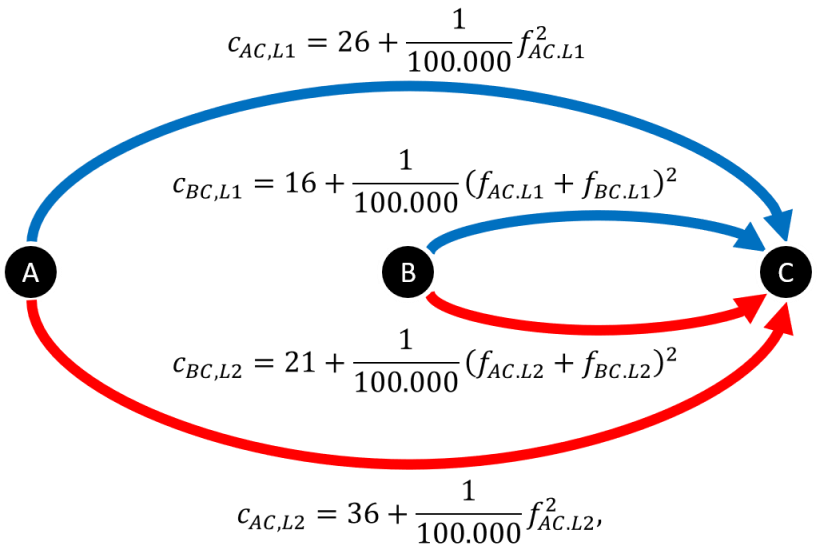
Pregunta 2: Considere un sistema de transporte público como el que se ilustra. Las paradas A, B y C se encuentran conectadas por dos servicios, L1 y L2, que operan en paraderos cercanos, pero no conectados, es decir, los usuarios se ven obligados a elegir qué servicio esperar. Ambos servicios operan con una frecuencia de 10 buses por hora, y con buses con capacidad para 100 pasajeros. El servicio L1 es ligeramente más rápido que L2. El sistema completo enfrenta una demanda por viajes en los pares AC y BC de $T_{AC} = 1.000$ pax/h y $T_{BC} = 800$ pax/h. El sistema enfrenta un nivel de congestión que se traduce en un aumento de los tiempos de espera. Para modelar las funciones de costo considere $\alpha = 1$ (es decir, un proceso de Poisson), $\beta = 10$ minutos, y $n = 2$.



a. **(10p)** Construya la red y las funciones de costo que permiten modelar el problema de asignación a transporte público con congestión como un problema de equilibrio de Wardrop. Indique la función de costo de cada arco, construida de acuerdo con cómo se vio en clases. Incluya solo los arcos necesarios para resolver la instancia de demanda entregada.

Solución:

La red que se pide es la siguiente[1]:



$$T_{AC} = 1000 \frac{pax}{h}$$

$$T_{BC} = 800 \frac{pax}{h}$$

[1]Se omiten los costos de $c_{AB,L1}$ y $c_{AB,L2}$ porque, como se indica en el inciso, solo se solicitan los arcos necesarios para resolver la instancia de demanda entregada, en este caso, AC y BC. Por eso, solo tenemos cuatro costos en lugar de seis. De todas formas, se puede trabajar con los seis costos, pero no es necesario.

b. **(5p)** ¿Qué puede afirmar de la unicidad de la solución de este problema de equilibrio en término de sus flujos en secciones de ruta, en base a su jacobiano?

Solución:

El jacobiano es:

$$J(C) = \begin{bmatrix} \frac{f_{AC.L1}}{50.000} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{f_{AC.L1} + f_{BC.L1}}{50.000} & \frac{f_{AC.L1} + f_{BC.L1}}{50.000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{AC.L2}}{50.000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{AC.L2} + f_{BC.L2}}{50.000} & \frac{f_{AC.L2} + f_{BC.L2}}{50.000} \end{bmatrix}$$

Para determinar si el problema posee solución única, debemos estudiar la siguiente matriz (dado que $J(C)$ es asimétrico):

$$\frac{J(C)+J^T(C)}{2}=\begin{bmatrix} \frac{f_{AC.L1}}{50.000} & \frac{f_{AC.L1}+f_{BC.L1}}{25.000} & 0 & 0 \\ \frac{f_{AC.L1}+f_{BC.L1}}{25.000} & \frac{f_{AC.L1}+f_{BC.L1}}{50.000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{AC.L2}}{50.000} & \frac{f_{AC.L2}+f_{BC.L2}}{25.000} \\ 0 & 0 & \frac{f_{AC.L2}+f_{BC.L2}}{25.000} & \frac{f_{AC.L2}+f_{BC.L2}}{50.000} \end{bmatrix}$$

Podemos observar directamente que los elementos de la diagonal son no negativos, pero que podrían valer 0. Esto implica que la matriz no es definida positiva, por lo que no nos permite garantizar la unicidad de la solución de este problema.

c. **(5p)** Construya las funciones de costo diagonalizadas de esta instancia, en torno a una asignación inicial a flujo libre.

Solución:

La asignación a flujo libre es:

$$F_0=\left(f_{AC.L1}^{(0)},f_{AC.L2}^{(0)},f_{BC.L1}^{(0)},f_{BC.L2}^{(0)}\right)=(1.000,0,800,0)$$

Diagonalizando:

$$\hat{c}_{AC,L1}=26+\frac{1}{100.000}f_{AC.L1}^2,\qquad \hat{c}_{BC,L1}=16+\frac{1}{100.000}(1.000+f_{BC.L1})^2$$

$$\hat{c}_{BC,L2}=21+\frac{1}{100.000}{f_{BC.L2}}^2,\qquad \hat{c}_{AC,L2}=36+\frac{1}{100.000}f_{AC.L2}^2,$$

d. **(10p)** Encuentre, de la manera que usted estime conveniente, la asignación de equilibrio de este problema.

Solución:

Notamos que las funciones de costo del par AC son todas diagonales. Eso significa que podemos calcular primero este equilibrio, ya que no depende del resto del sistema. Calculamos el equilibrio del par AC:

$$c_{AC,L1}=26+\frac{1}{100.000}f_{AC.L1}^2,\qquad c_{AC,L2}=36+\frac{1}{100.000}f_{AC.L2}^2.$$

El equilibrio acá ocurre con: $f_{AC.L1}^*=1.000,\ f_{AC.L2}^*=0,\ c_{AC}^*=36.$

Calculamos el equilibrio del par BC considerando los flujos de equilibrio ya encontrados:

$$c_{BC,L1}=16+\frac{1}{100.000}(1.000+f_{BC.L1}^*)^2,\qquad c_{BC,L2}=21+\frac{1}{100.000}{f_{BC.L2}^*}^2.$$

El equilibrio en BC es, en consecuencia: $f_{BC.L1}^*=38{,}89,\ f_{BC.L2}^*=761{,}11,\ c_{BC}^*=26{,}79.$

Pregunta 3:

a. **(5p)** Estamos resolviendo un problema de equilibrio de tráfico usando el algoritmo de F-W. Si en una iteración obtenemos que la dirección de descenso es $D = 0$, ¿qué correspondería hacer?
   - **Opción 1**: Revisar la implementación de F-W porque tiene que haber un error. En este caso, indique dónde buscar ese error.
   - **Opción 2**: Detener F-W porque hemos encontrado el óptimo. Si este es el caso, explique cómo podemos saber esto.

Solución:

$$D = 0 \leftrightarrow F = Y$$

Es decir, $D = 0$ implica que la asignación de la iteración actual (F) es la misma que se obtendría si asignamos la demanda a rutas mínimas con los costos actuales (Y). Esto claramente significa que, dados los costos actuales, nadie en F tiene un incentivo de cambiar su ruta, por lo que debemos encontrarnos en un equilibrio.

Opción correcta: 2.

Otra forma de verlo: si $Y = F$ la cota máxima se iguala con la cota mínima. Esto implica que estamos en el óptimo y por lo tanto que se alcanzó el equilibrio.

b. **(10p)** Considere ahora una instancia formada por dos nodos conectados por dos arcos, donde el costo de cada arco $i \in \{1, 2\}$ es lineal, $c_i(f_i) = \alpha_i + \beta_i f_i$, donde $\alpha_i > 0$ y $\beta_i > 0$ son parámetros conocidos. Suponga que además que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, y que la demanda T del par OD es tal que $0 < T \leq (\alpha_2 - \alpha_1)/\beta_1$. Aplique una iteración del algoritmo de F-W sobre esta instancia para encontrar su solución de equilibrio (no entregue cotas).

Solución:

Costos a flujo libre:

$$C_0 = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Como $\alpha_1 < \alpha_2$, tenemos que la asignación a flujo libre es:

$$F^{(1)} = (T, 0)$$

Los costos de la primera iteración son:

$$C^{(1)} = (\alpha_1 + \beta_1 T, \alpha_2)$$

Notando que $T \leq (\alpha_2 - \alpha_1)/\beta_1 \rightarrow \alpha_1 + \beta_1 T \leq \alpha_2$, la asignación a rutas mínimas es:

$$Y^{(1)} = (T, 0)$$

De acuerdo a lo expuesto en la parte a, esto implica que la solución actual es de equilibrio.

Tiempo: 70 minutos.