Martes, 8 de septiembre, 2026.

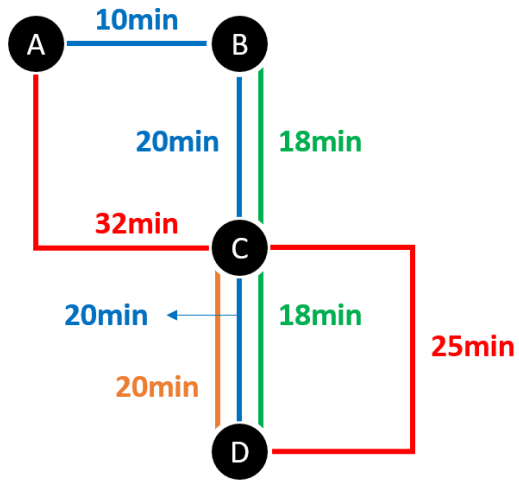
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería Civil
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

CONTROL 1

ICT-3283 Equilibrio en Redes de Transporte

Prof. Homero Larrain Izquierdo

Pregunta 1: Se entrega el mapa de un sistema de transporte público que opera con cuatro servicios diferentes en sentido A-B-C-D. Se indican los tiempos de viaje de cada tramo, y las frecuencias de los servicios. Asuma que $k = 1$ y que $\theta = 1$.

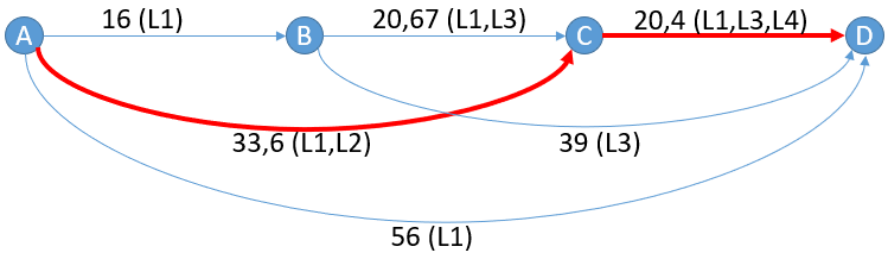


Línea	Trazado	Bus/h
L1	ABCD	10
L2	ACD	15
L3	BCD	20
L4	CD	20

a. **(15p)** Encuentre la **ruta mínima** para ir de A a D y su tiempo esperado de viaje, entregando el grafo de secciones de ruta asociado.

Solución:

Resolvemos Chriqui en cada par OD. La red queda así:



La ruta mínima es tomar L1 o L2 para ir de A a C, y luego L1, L3 o L4 para ir de C a D, con un tiempo esperado de viaje de 54 minutos.

b. **(10p)** Suponga que el tramo AC de la L2 se ve reducido a t_{AC} minutos. ¿Para qué valores de t_{AC} la nueva ruta óptima sería esperar los servicios L1 y L2 (el primero en pasar) para viajar directo a D? ¿Para qué valores de t_{AC} la nueva ruta óptima sería esperar **exclusivamente** el servicio L2 para viajar directo a D?

Solución:

El tiempo de la ruta mínima actual (ACD) es función de t_{AC}:

$$TEV_{ACD} = \frac{10 \cdot 30 + 15 \cdot t_{AC} + 60}{25} + 20{,}4 = 34{,}8 + 0{,}6 \cdot t_{AC}$$

El tiempo de esperar L1 o L2 para viajar directo es:

$$TEV_{L1,L2} = \frac{10 \cdot 50 + 15 \cdot (t_{AC} + 25) + 60}{25} = \frac{935 + 15t_{AC}}{25} = 37{,}4 + 0{,}6 \cdot t_{AC}$$

Observamos que $TEV_{ACD} < TEV_{L1,L2}$ para cualquier $t_{AC} \geq 0$, por lo que concluimos que esta la opción L1+L2 directo nunca será más rápida que la ruta óptima ACD.

El tiempo de esperar solo L2 para viajar directo es:

$$TEV_{L2} = t_{AC} + 25 + 4 = 29 + t_{AC}$$

Para que esta opción sea más rápida se tiene que dar que $TEV_{L2} < TEV_{ACD}$

$$29 + t_{AC} < 34{,}8 + 0{,}6 \cdot t_{AC}$$

$$t_{AC} < 14{,}5$$

Por lo tanto, la ruta L2 directo pasa a ser atractiva cuando $t_{AC} < 14{,}5$.

c. **(5p)** Suponga que el tramo AC de la L2 se ve reducido a t_{AC} minutos. Considere la estrategia "En el paradero A si pasa L2 lo tomo directo a D, y si pasa L1 lo tomo hasta el nodo C, donde transbordo a L3". Indique cuál es el valor esperado de esta estrategia en función de t_{AC}.

Solución:

$$TEV = \frac{60}{15+10} + \frac{10}{15+10}\left(30 + \frac{60}{20} + 18\right) + \frac{15}{15+10}(t_{AC} + 25)$$

$$TEV = 37{,}8 + 0{,}6 \cdot t_{AC}$$

Pregunta 2: Considere un par OD conectado por dos rutas, representadas cada una por un arco. Los costos de ambas rutas son $c_1(F) = 10 + 2f_1 + \beta f_2$ y $c_2(F) = 12 + f_2 + \beta f_1$, donde $F = (f_1, f_2)$ y $\beta \geq 0$ es un parámetro. La demanda por viajes de este par OD es T.

a. **(5p)** Indique para qué valores de β esta instancia satisface las condiciones suficientes de unicidad del problema de equilibrio de tráfico.

Solución:

$$J(C) = \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$$

$J(C)$ será positivo definido si $2 - \beta^2 > 0$, por lo tanto, podemos garantizar que el equilibrio será único cuando $\beta < \sqrt{2}$.

b. **(5p)** Indique en función de β para qué valores de T la solución $F_1 = (T, 0)$ es equilibrio de tráfico. Ídem para $F_2 = (0, T)$.

Solución:

- $(T, 0)$ es equilibrio si:

$$c_1(T, 0) = 10 + 2T \leq c_2(T, 0) = 12 + \beta T$$

$$(2 - \beta)T \leq 2$$

  - Si $\beta < 2$: solo si $T \leq \frac{2}{2-\beta}$
  - Si $\beta \geq 2$: siempre

- $(0, T)$:

$$12 + T \leq 10 + \beta T$$

$$2 \leq (\beta - 1)T$$

  - Si $\beta > 1$: solo si $T \geq \frac{2}{\beta-1}$
  - Si $\beta \leq 1$: nunca

Pregunta 3: Considere la red formada por dos nodos A y B, y por n arcos conectando estos dos nodos. El costo del arco i se denomina como $c_i(f_i)$ y es función estrictamente creciente del flujo sobre el mismo arco, f_i. La demanda por viajes de A a B es T. Sea $F^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ la solución de equilibrio de esta red.

a. **(10p)** Sean i y j dos arcos tales que $c_j(0) < c_i(0)$. Demuestre que si $f_i^* > 0$, entonces necesariamente $f_j^* > 0$.

Solución:

Por equilibrio se tiene que como $f_i^* > 0$, entonces $c_i(f_i^*) \leq c_j(f_j^*)$.

Supongamos que $f_j^* = 0$: esto implica que $c_i(f_i^*) \leq c_j(0)$, pero como además $c_j(0) < c_i(0)$, podemos concluir que $c_i(f_i^*) < c_i(0)$. Esto es evidentemente una contradicción ya que $c_i(f_i)$ es una función estrictamente creciente. Esto demuestra que $f_j^* > 0$.

b. **(10p)** Considere ahora que el costo del arco i es lineal, $c_i(f_i) = \alpha_i + \beta_i f_i$, donde $\alpha_i > 0$ y $\beta_i > 0$ son parámetros conocidos. Suponga que además los arcos se encuentran ordenados por costo fijo, es decir, $\alpha_i \leq \alpha_j$ para todo $i < j$. Sea T_k el nivel de demanda que "activa" el arco k, es decir, el nivel de demanda que hace que el arco k comience a llevar flujo. Sea c_k^* el costo de equilibrio cuando la demanda es T_k. Entregue una fórmula para c_k^* y T_k.

Solución:

Por equilibrio se tiene $f_i > 0$ para $i = 1, \dots, k-1$ y $f_i = 0$ para $i \geq k$. Como T_k es el flujo que activa a k, podemos saber que $f_k = 0$ y que el costo de equilibrio es $c^* = c_k(0) = \alpha_k$. Igualando los costos de los arcos activos:

$$\alpha_1 + \beta_1 f_1 = \cdots = \alpha_i + \beta_i f_i = \cdots = \alpha_k$$

Es decir:

$$\alpha_i + \beta_i f_i = \alpha_k, \qquad \forall i < k$$

$$f_i = \frac{\alpha_k - \alpha_i}{\beta_i}, \qquad \forall i < k$$

Sumando para los arcos activos con flujo positivo:

$$T_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_k - \alpha_i}{\beta_i}$$

Tiempo: 70 minutos.