Control 7

La siguiente función Z es la función objetivo para un problema de equilibrio con interacciones en una red con tres arcos:

$$Z = 10f_1^2 + 12f_2^2 + 15f_3^2 + 3f_1f_2 + \alpha f_1f_3$$

a. **3p** ¿Cuáles son las funciones de costo de los arcos de la red cuyo problema equivalente tiene función objetivo Z?
b. **3p** Determine para qué valores de α usted puede garantizar que este problema de equilibrio posee solución única.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + \end{matrix} \; +$$

Ayudante: Antonia Alcayaga, antonia.alcayaga@uc.cl

Control 7 – pauta

$$Z = 10f_1^2 + 12f_2^2 + 15f_3^2 + 3f_1f_2 + \alpha f_1f_3$$

Funciones de costo:

$$\frac{\partial Z}{\partial f_1} = c_1 = 20f_1 + 3f_2 + \alpha f_3$$

$$\frac{\partial Z}{\partial f_2} = c_2 = 24f_2 + 3f_1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial f_3} = c_3 = 30f_3 + \alpha f_1$$

Ayudante: Antonia Alcayaga, antonia.alcayaga@uc.cl

Control 7 – pauta

$$Z = 10f_1^2 + 12f_2^2 + 15f_3^2 + 3f_1f_2 + \alpha f_1f_3$$

$$c_1 = 20f_1 + 3f_2 + \alpha f_3, \qquad c_2 = 24f_2 + 3f_1, \qquad c_3 = 30f_3 + \alpha f_1$$

Jacobiano:

$$J(C) = \begin{bmatrix} 20 & 3 & \alpha \\ 3 & 24 & 0 \\ \alpha & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Tenemos que los dos primeros subdeterminantes son positivos (20 y 271). Para que la solución sea única, necesitamos que el determinante completo sea positivo.

Ayudante: Antonia Alcayaga, antonia.alcayaga@uc.cl

Control 7 – pauta

$$Z = 10f_1^2 + 12f_2^2 + 15f_3^2 + 3f_1f_2 + \alpha f_1f_3$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 3 & \alpha \\ 3 & 24 & 0 \\ \alpha & 0 & 30 \end{vmatrix} = 20 \cdot 24 \cdot 30 - 3 \cdot 3 \cdot 30 - 24 \cdot \alpha^2 = 14130 - 24 \cdot \alpha^2$$

$$14130 - 24 \cdot \alpha^2 > 0$$

$$\alpha < 24{,}26$$

Podemos asegurar la unicidad de la solución de este problema cuando $\alpha < 24{,}26$.

Ayudante: Antonia Alcayaga, antonia.alcayaga@uc.cl