Respuestas Guía de Ejercicios Cap. 6

Pregunta 1

- Tras la primera iteración del algoritmo de diagonalización a partir de la asignación a flujo libre se obtienen la siguiente asignación de flujos y costos:

$$F^{(1)} = (2, 8)$$
$$C^{(1)} = (27\,, 41)$$

- La asignación $f_1 = 10; f_2 = 0$ es la única solución de este problema de equilibrio de tráfico. Si observamos las funciones de costo, notamos que para cualquier asignación factible de flujos tal que $f_1 + f_2 = 10; f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$, siempre se cumple que $c_1 < c_2$. Luego, la única posibilidad de que no existan incentivos para que los usuarios cambien de ruta es que todos vayan por la más barata.

Pregunta 2

- Al construir el jacobino simétrico se obtiene $J(c)$. Del análisis de los subdeterminantes se concluye que es definido positivo y por lo tanto la solución es única en términos de flujos en arcos.

$$J(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- El jacobiano original en este caso es asimétrico, por lo que no se puede formular un problema de optimización equivalente.

- La formulación como desigualdad variacional es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 6 + f_1^* + 0{,}4f_2^* \\ 5 + 2f_2^* \\ 10 + 1{,}2f_3^* \\ 4 + f_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 - f_1^* \\ f_2 - f_2^* \\ f_3 - f_3^* \\ f_4 - f_4^* \end{pmatrix} \geq 0$$

$$h_1 + h_2 = 106$$

$$h_3 + h_4 + h_5 = 75$$

$$f_1 = h_1 + h_3$$

$$f_2 = h_2 + h_4$$

$$f_3 = h_5$$

$$f_4 = h_3 + h_4$$

$$h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \geq 0$$

Rutas A-B: R1: {1}, R2: {2}.
Rutas A-C: R3: {1, 4}, R4: {2, 4} y R5: {3}.

- El vector de costos en ruta es C. Es directo ver que no se cumple Knight ya que el costo de la R5 es diferente al de R3 y R4, siendo que todas sirven un mismo par O-D.

$$C = (145, 145, 224, 224, 10)$$

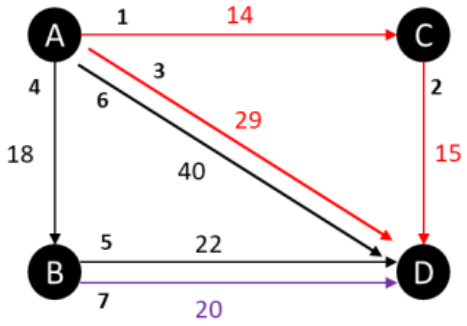
Para verificar si se cumple Wardrop, debemos notar que $h_5 = 0$ y por lo tanto se cumple que $h_3 + h_4 = 75$ con $h_3 \geq 0, h_4 \geq 0$. Esto quiere decir que al menos una de las rutas R3 o R4 lleva flujo positivo y tiene un costo mayor al de R5. A partir de esto se concluye que no se cumple el principio de Wardrop.

Pregunta 3

La solución de los primeros dos incisos se encuentra al final de este documento. De momento, no está disponible la respuesta para la iteración de Frank-Wolfe ni para la iteración del algoritmo de diagonalización.

Pregunta 4

- El grafo de secciones de línea $G = (N, L)$ es el siguiente (los arcos pueden tener una numeración diferente):



- Los costos de los arcos están dados por:

$$c_1 = 18 + 3\left(\frac{v_1 + v_3}{1500}\right)$$
$$c_2 = 19 + 3\left(\frac{v_2 + v_3}{1500}\right)$$
$$c_3 = 33 + 3\left(\frac{v_3 + v_1}{1500}\right)$$
$$c_4 = 21 + 3\left(\frac{v_4 + v_6}{1600}\right)$$
$$c_5 = 25 + 3\left(\frac{v_5 + v_6}{1600}\right)$$
$$c_6 = 43 + 3\left(\frac{v_6 + v_4}{1600}\right)$$
$$c_6 = 26 + \frac{3v_7}{1000}$$

- **Diagonalización**
  - La asignación a flujo libre es $f^0 = (0;\ 0;\ 4500;\ 0;\ 6400;\ 0;\ 0)$.
  - Las funciones de costo diagonalizadas son:

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 27 + \frac{v_1}{500} \\ 28 + \frac{v_2}{500} \\ 33 + \frac{v_3}{500} \\ 21 + \frac{3v_4}{1600} \\ 25 + \frac{3v_5}{1600} \\ 43 + \frac{3v_6}{1600} \\ 26 + \frac{3v_7}{1000} \end{bmatrix}$$

  - **Aquí comienza Frank-Wolfe**. Por simpleza, $\hat{c} = c$.
    - Asignación a flujo libre y actualización de costos:

$$c^0 = \begin{bmatrix} 27 \\ 28 \\ 33 \\ 21 \\ 25 \\ 43 \\ 26 \end{bmatrix} \rightarrow f^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4500 \\ 0 \\ 6400 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow c^1 = \begin{bmatrix} 27 \\ 28 \\ 42 \\ 21 \\ 37 \\ 43 \\ 26 \end{bmatrix}$$

    - Aproximación lineal y f_2 en función de λ.

$$y^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6400 \end{bmatrix} \rightarrow d^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6400 \\ 0 \\ 6400 \end{bmatrix} \rightarrow f^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4500 \\ 0 \\ 6400 - 6400\lambda \\ 0 \\ 6400\lambda \end{bmatrix} \quad c^2 = \begin{bmatrix} 27 \\ 28 \\ 42 \\ 21 \\ 37 - 12\lambda \\ 43 \\ 26 + 19{,}2\lambda \end{bmatrix}$$

    - El paso óptimo es $\lambda^* = 0.353$.
    - El nuevo flujo es:

$$f^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4500 \\ 0 \\ 4140{,}8 \\ 0 \\ 2259{,}2 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta f = \begin{bmatrix} 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 55\% \\ 0\% \\ 100\% \end{bmatrix}$$

  - Luego, $F^{(1)} = f^2$ es la solución de la primera iteración del algoritmo de diagonalización.

P3)

$$\min_{F} Z = \int_0^{f_{AB}} (5 + \tfrac{3}{2}x)\,dx + \int_0^{f_{AC}} (3+2x)\,dx + \int_0^{f_{CB}} (4+x)\,dx + 24 f_{AB}^{1} + 36 f_{AB}^{2}$$

1)

$$+ 18 f_{AC}^{1} + 27 f_{AC}^{2}$$

s.a)

$$h_1^1 + h_2^1 = 20$$
$$h_1^2 + h_2^2 = 15$$
$$h_3^1 = 5$$
$$h_3^2 = 10$$
$$f_{AB}^1 = h_1^1$$
$$f_{AB}^2 = h_1^2$$
$$f_{AC}^1 = h_2^1$$
$$f_{AC}^2 = h_2^2$$
$$f_{CB}^1 = h_2^1 + h_3^1$$
$$f_{CB}^2 = h_2^2 + h_3^2$$
$$f_{AB} = f_{AB}^1 + f_{AB}^2$$
$$f_{AC} = f_{AC}^1 + f_{AC}^2$$
$$f_{CB} = f_{CB}^1 + f_{CB}^2$$
$$h_1^1, h_1^2, h_2^1, h_2^2, h_3^1, h_3^2 \geq 0$$

Rutas

A → B : → h_1

↘ ↗ h_2

C → B : ↗ h_3

2) Utilizando la definición del Hessiano, aplicada a flujos en rutas por categoría de usuarios.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial h_p^k \partial h_q^l} = \sum_a \frac{\partial ca^k(f_a)}{\partial f_a^l} \cdot \delta_{ap} \cdot \delta_{aq}$$

El Hessiano es el siguiente:

$$H(Z)_{/h_p^k/} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El cual, al tener filas L.D sabemos que su determinante es cero

∴ es semidefinida positiva

por lo que no se puede asegurar unicidad en la solución.

CS Escaneado con CamScanner