Pauta I1 1-2021

Pregunta 2

[10 puntos]

La afirmación es falsa. Las funciones de costo BPR no representan bien los estados de congestión. Esto se debe a que el tiempo o costo no es una función. Las funciones BPR solamente representan bien estados sin congestión o con congestión moderada **(10/10).**

Las funciones BPR son usadas en la práctica por temas algorítmicos aún cuando las asintóticas representan mejor la existencia de un límite real **(5/10).**

Si pusieron que las asintóticas representan mejor la congestión o que las funciones BPR modelan bien la hipercongestión **(0/10).**

Pregunta 3

[10 puntos]

El algoritmo es más rápido que el algoritmo estándar porque ahorra el tener que ordenar de menor a mayor el tiempo de viaje **(2/10).**

Algoritmo malo (entrega soluciones no óptimas). Si en un inicio se escoge la línea con mayor tiempo, dentro de las líneas atractivas existirán rutas que realmente no lo son (si se comparan, son menores a la tomada en un inicio, lo que no necesariamente las hace líneas atractivas) **(10/10).**

Pregunta 4

[15 puntos]

Si H cumple las condiciones de Smith entonces el costo de todas las rutas que llevan flujo será igual al costo mínimo de equilibrio C_w^*. El resto de las rutas tendrán un costo igual o mayor.

Además tenemos que

$$\sum_{p=1}^{r} h_p + \sum_{p=r+1}^{s} h_p = T_w$$

Y el costo total en el equilibrio estará dado por

$$C_w^* \sum_{p=1}^{r} h_p + \sum_{p=r+1}^{s} C_p^* \cdot h_p = C_w^* \cdot T_w$$

Podemos escribir el primer término de la sumatoria como $\sum_{p=1}^{r} h_p = T_w - \sum_{p=r+1}^{s} h_p$. Y el costo total:

$$C_w^* \cdot (T_w - \sum_{p=r+1}^{s} h_p) + \sum_{p=r+1}^{s} C_p^* \cdot h_p$$

$$C_w^* \cdot T_w + \sum_{p=r+1}^{s} h_p (C_p^* - C_w^*)$$

Diferentes casos.

- Si alguien se cambia a una ruta sin flujo, el costo Cp será mayor o igual a Cw, luego el costo total es mayor o igual al original.
- Si alguien se cambia de una ruta con flujo a otra con flujo, ocurre que las rutas sin flujos continuarán sin flujo y el costo total en este caso se mantiene (segundo término sigue siendo cero).

Se entregan **5 puntos** si demostraba que Wardrop -> Smith.

Pregunta 5

[10 puntos]

No es un criterio adecuado dado que la solución en términos de flujo en ruta no es óptima, por lo que podría ocurrir que en dos iteraciones sucesivas ambas soluciones sean óptimas (hp y hp+1) y distintas, y el algoritmo planteado no lo detectaría.

Pregunta 6

Parte 1: [10 puntos]

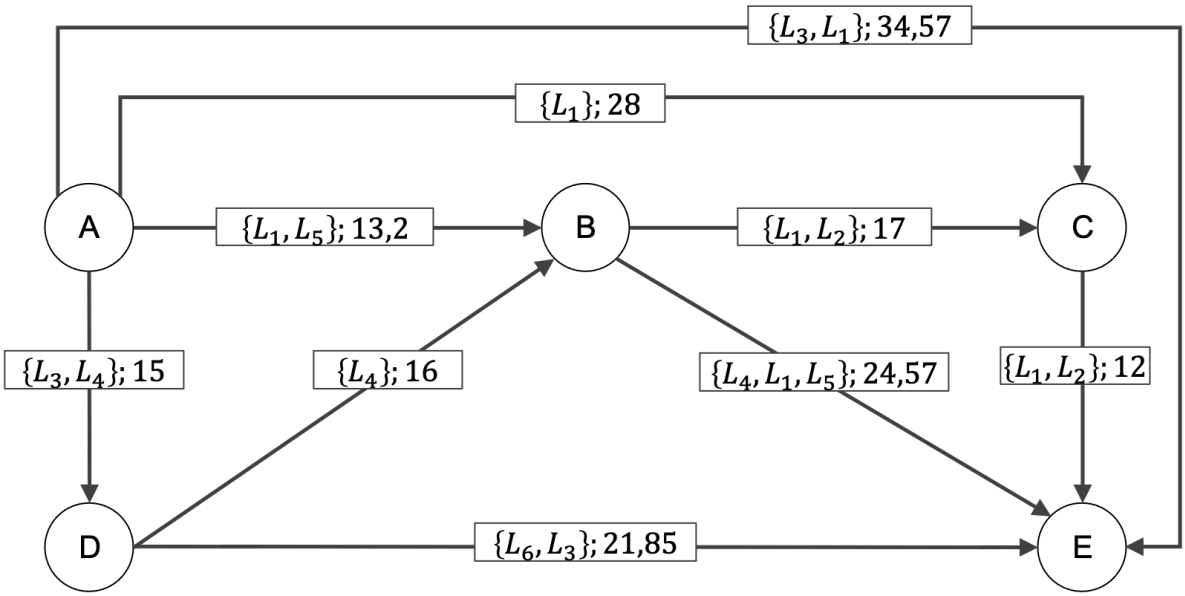
Utilizando el Algoritmo de Chriqui y Robillard se construye la red auxiliar $G(N, L)$.

- Buses llegan de acuerdo a un proceso Poisson $\rightarrow k = 1$
- Se definen los conjuntos de líneas atractivas para cada par OD minimizando la siguiente expresión:

$$TEV_s = \sum_{i \in S} \frac{f_i * t_i + k}{\sum_{i \in S} f_i}$$

[1 punto]

En base a esto, se obtiene la siguiente red auxiliar $G(N, L)$:



[1 punto por cada arco, con su respectivo S y TEV_S]

Parte 2: [5 puntos]

Se tienen demanda de viajes entre los pares AE y BE. Las rutas mínimas para estos pares corresponden a:

$A \rightarrow E$: Ir desde A hasta E a través de $\{L_1, L_3\} \rightarrow TEV = 34{,}57$
$B \rightarrow E$: Ir desde B hasta E a través de $\{L_1, L_4, L_5\} \rightarrow TEV = 24{,}57$

[1 punto]

Asignación de Viajes: Primero se asignan los viajes de cada par con demanda a las líneas que conforman su respectivo conjunto de líneas atractivas.

$A \rightarrow E$:

$$L_1 \rightarrow \frac{1000 * 15}{20 + 15} = 428{,}6 \approx 429 \ \frac{pax}{h}$$

$$L_3 \rightarrow \frac{1000 * 20}{20 + 15} = 571{,}4 \approx 571 \ \frac{pax}{h}$$

$B \rightarrow E$:

$$L_1 \rightarrow \frac{700 * 15}{15 + 10 + 10} = 300 \ \frac{pax}{h}$$

$$L_4 \rightarrow \frac{700 * 10}{15 + 10 + 10} = 200 \ \frac{pax}{h}$$

$$L_5 \rightarrow \frac{700 * 10}{15 + 10 + 10} = 200 \ \frac{pax}{h}$$

[1 punto]

En base a esto, se realiza la asignación sobre los arcos que llevan flujo en la red original:

$$L_1 \rightarrow \ f_{AB}^{L_1} = 429 \ \ ; \ \ f_{BC}^{L_1} = 429 + 300 = 729 \ \ ; \ \ f_{CE}^{L_1} = 429 + 300 = 729$$

$$L_3 \rightarrow \ f_{AD}^{L_3} = 571 \ \ ; \ \ f_{DE}^{L_3} = 571$$

$$L_4 \rightarrow \ f_{BE}^{L_4} = 200$$

$$L_5 \rightarrow \ f_{BE}^{L_5} = 200$$

El resto de los arcos no llevan flujo.

[2 puntos]

Perfil de carga L_1: Se calcula la carga de la L_1 en cada uno de sus tramos dado que $frec_{L_1} = 15 \ buses/h$

$A \rightarrow B$:

$$Carga_{AB}^{L1} = \frac{f_{AB}^{L_1}}{frecuencia_{L_1}} = \frac{429 \left[\frac{pax}{h}\right]}{15 \left[\frac{buses}{h}\right]} \approx 28{,}6 \left[\frac{pax}{bus}\right]$$

$B \rightarrow C$:

$$Carga_{BC}^{L1} = \frac{f_{BC}^{L_1}}{frecuencia_{L_1}} = \frac{729 \left[\frac{pax}{h}\right]}{15 \left[\frac{buses}{h}\right]} \approx 48{,}6 \left[\frac{pax}{bus}\right]$$

$C \rightarrow E$:

$$Carga_{CE}^{L1} = \frac{f_{CE}^{L_1}}{frecuencia_{L_1}} = \frac{729\ \left[\frac{pax}{h}\right]}{15\ \left[\frac{buses}{h}\right]} \approx 48{,}6\ \left[\frac{pax}{bus}\right]$$

[1 punto]

Parte 3: [10 puntos]

Se debe evaluar el tiempo total esperado para la estrategia dada. La solución propuesta divide este tiempo de la siguiente forma:

- TE_A: Tiempo de espera en A. Es posible tomar en A las líneas $\{L_1, L_3, L_4, L_5\}$

$$TE_A = \frac{60}{15 + 20 + 10 + 10} = \frac{60}{55} = \frac{12}{11} \approx 1{,}09\ mins$$

- T_1: Ir de A a C por $\{L_1\}$ y luego de C a E por $\{L_1, L_2\}$

$$T_1 = 24 + \frac{60}{15 + 15} + \frac{15 * 10 + 15 * 10}{15 + 15} = 36\ mins$$

- T_2: Ir de A a E por $\{L_3\}$

$$T_2 = 12 + 20 = 32\ mins$$

- T_3: Ir de A a D por $\{L_4\}$ y luego de D a E por $\{L_4, L_6\}$

$$T_3 = 15 + \frac{60}{10 + 6} + \frac{30 * 10 + 18 * 6}{10 + 6} = 44{,}25\ mins$$

- T_4: Ir de A a B por $\{L_5\}$ y luego de B a E por $\{L_1, L_2, L_4, L_5\}$

$$T_4 = 12 + \frac{60}{15 + 15 + 10 + 10} + \frac{24 * 15 + 26 * 15 + 20 * 10 + 24 * 10}{15 + 15 + 10 + 10} = 37\ mins$$

Finalmente, se calcula el tiempo total esperado de la estrategia ponderando los tiempos T_i calculados anteriormente por la "probabilidad" de tomar cada una de estas secuencias, la que es proporcional a las frecuencias del servicio tomado en A.

$$E[T_{TOTAL}] = TE_A + \frac{15}{55} * T_1 + \frac{20}{55} * T_2 + \frac{10}{55} * T_3 + \frac{11}{55} * T_4$$

$$E[T_{TOTAL}] = 37{,}32\ mins$$

[TE_A: 1 punto,
T_i: 1,5 puntos c/u,
Proporciones de frecuencias (todas): 2 puntos,
$E[T_{TOTAL}]$: 1 punto]

Parte 4: [5 puntos]

La estrategia propuesta es mala.

[1 punto]

Se aprecia que la ruta mínima encontrada anteriormente posee un tiempo total menor que el correspondiente a esta estrategia, es decir, esta estrategia es peor que la ruta mínima. Adicionalmente, dentro de la estrategia se plantea tomar una línea y bajarse antes de lo ideal, lo que incrementa el tiempo total esperado de viaje aumentando los tiempos de espera.

[Justificación correcta: 4 puntos]

Pregunta 7

Parte I

Comenzamos enumerando las rutas disponibles:

- Rutas entre A y E:
  - H1 → A-B-E
  - H2 → A-C-D-E
  - H3 → A-B-D-E
  - H4 → A-B-C-D-E
- Rutas entre B e E:
  - H5 → B-E
  - H6 → B-D-E
  - H7 → B-C-D-E

Se pide expresar el problema en términos de flujos en ruta, por lo que necesitamos expresar los costos en función de los flujos en rutas, no en función de flujos en arcos. Para esto, utilizamos las siguientes ecuaciones:

$$f_1 = h_1 + h_3 + h_4$$
$$f_2 = h_2$$
$$f_3 = h_4 + h_7$$
$$f_4 = h_3 + h_6$$
$$f_5 = h_1 + h_5$$
$$f_6 = h_2 + h_4 + h_7$$
$$f_7 = h_2 + h_3 + h_4 + h_6 + h_7$$

Por otra parte, debemos calcular los costos en cada ruta. Primero, los calculamos en función de flujos en arco:

$$c_1 = 5 + f_1 + 4f_5$$
$$c_2 = 17 + f_2 + f_7$$
$$c_3 = 8 + f_1 + 3f_4 + f_3 + f_7$$
$$c_4 = 17 + f_1 + 2f_3 + f_4 + f_7$$
$$c_5 = 1 + 4f_5$$
$$c_6 = 6 + 3f_4 + f_3 + f_7$$
$$c_7 = 15 + 2f_3 + f_4 + f_7$$

Teniendo estos costos en función de flujos, y los flujos en función de las rutas, se procede a calcular los costos en función de las rutas, para esto remplazamos los flujos en función de las rutas en las ecuaciones de los costos obteniendo lo siguiente:

$$c_1(h) = 3 + 5h_1 + h_3 + h_4 + 4h_5$$
$$c_2(h) = 17 + 2h_2 + h_3 + h_4 + h_6 + h_7$$
$$c_3(h) = 8 + h_1 + 6h_3 + 2h_4 + 4h_6 + h_2 + 2h_7$$
$$c_4(h) = 17 + h_1 + 5h_3 + 2h_4 + 2h_6 + 3h_7 + h_2$$
$$c_5(h) = 1 + 4h_1 + 4h_5$$
$$c_6(h) = 6 + 5h_3 + 4h_6 + h_4 + 2h_7 + h_2$$
$$c_7(h) = 15 + h_4 + 3h_7 + 4h_3 + 2h_6 + h_2$$

Con estos costos, podemos plantear finalmente el problema de desigualdad variacional:

$$\sum_{i=1}^{7} c(h_i^*)(h_i - h_i^*) \geq 0$$

$$s.a$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 100$$

$$h_5 + h_6 + h_7 = 200$$

$$h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7 \geq 0$$

Parte II

Vemos si el flujo dado es factible, para que sea factible, se debe cumplir que los flujos sean no negativos y las siguientes ecuaciones:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 100$$

$$r_4 + r_5 = 60$$

Remplazando con los valores dados:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 3 + \frac{1041}{11} + \frac{26}{11} = 100$$

$$r_4 + r_5 = \frac{203}{11} + \frac{347}{11} = 50$$

Notamos que no se cumple la segunda restricción, por lo que la solución no puede ser óptima.