Noviembre, 2018.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

# MODELOS COMBINADOS DE EQUILIBRIO

## ICT-3283 Equilibrio en Redes de Transporte

Prof. Homero Larrain Izquierdo

1. Sobre la red que se ilustra se desea resolver un problema combinado de distribución, partición modal, y asignación, bajo los siguientes supuestos:

   - El nodo $A$ genera $O_A = 1.000$ viajes/hora, que se distribuyen entre los nodos $B$ y $C$, con atractividades $M_B = 30$ y $M_C = 40$, y con parámetro de escala $\beta = 0{,}1$.
   - En cada par O-D el problema de partición modal se puede modelar como un logit multinomial de parámetro $\lambda = 1$.
   - Los usuarios se asignan a las rutas disponibles en cada modo de acuerdo a las condiciones de equilibrio dadas por el primer principio de Wardrop.
   - Por el arco 1 circulan sólo autos, mientras que por los arcos 2 y 3 circulan autos y buses.
   - El tiempo de viaje (en minutos) de un tramo se puede modelar como

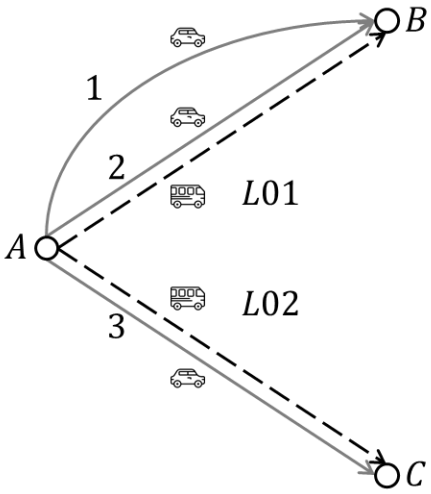
   $$t_a = tf_a + \frac{X_a}{20n_a}.$$

   En esta expresión $tf_a$ es el tiempo de viaje a flujo libre de $a$ (en minutos), $X_a$ corresponde al flujo total del tramo (en vehículos equivalentes por hora), y $n_a$ es la cantidad de pistas del tramo. Considere que un bus equivale a tres autos para efectos de congestión.

   - El tiempo de viaje total (en minutos) en el servicio $l$ de bus se puede modelar como

   $$t_l = t_{a(l)} + \frac{60}{f_l} + \frac{8v_l}{f_l \kappa_l}.$$

   En esta expresión, $t_{a(l)}$ es el tiempo de viaje en el tramo $a(l)$ por el que transita $l$. Además, $f_l$ corresponde a la frecuencia nominal del servicio (en buses/hr), $v_l$ es el flujo de pasajeros que compite por capacidad en $l$ (en pax/hr), y $\kappa_l$ es la capacidad de cada bus.




| $a$ | $tf_a$ (min) | $n_a$ |
|---|---|---|
| 1 | 50 | 2 |
| 2 | 45 | 2 |
| 3 | 60 | 2 |

| $l$ | $f_l$ (bus/hr) | $\kappa_l$ (pax/bus) |
|---|---|---|
| L01 | 8 | 100 |
| L02 | 10 | 65 |

(Íconos por Madebyoliver, www.flaticon.com)

Considere el caso donde los buses circulan por vías exclusivas, es decir, una de las pistas del tramo está dedicada en forma exclusiva a los buses, y la otra a los autos.

a. **(5p)** Construya las funciones de tiempo de viaje para cada par-modo en esta red.
b. **(10p)** Plantee en forma matemática las condiciones de equilibrio de mercado para el problema descrito.
c. **(10p)** Plantee un problema de optimización (específico a esta red) cuya solución permita determinar el equilibrio de mercado de la red.
d. **(15p)** Considere la solución inicial donde los 1.000 viajes se reparten en forma homogénea entre las 5 alternativas par-modo. ¿Satisface esta solución las condiciones de equilibrio de tráfico? ¿y las condiciones de equilibrio para la partición modal? ¿y para la distribución? Considere los tiempos de viaje hasta el primer decimal.

Considere ahora el caso donde no existen vías exclusivas, y tanto buses como autos circulan a la velocidad determinada por las condiciones de tráfico mixto.

e. **(10p)** Construya las funciones de tiempo de viaje para cada par-modo en esta red, y diagonalícelas en torno a la solución inicial propuesta para la parte d.

**Solución:**

a.

Auto:

$$c_1 = 50 + \frac{x_1}{40}, \qquad c_2 = 45 + \frac{x_2}{20}, \qquad c_3 = 60 + \frac{x_3}{20}$$

Bus:

$$c_{L01} = 45 + \frac{3 \cdot 8}{20} + \frac{60}{8} + \frac{8 \cdot v_{L01}}{8 \cdot 100} = 53{,}7 + \frac{v_{L01}}{100}$$

$$c_{L02} = \cdots = 67{,}5 + 4 \cdot \frac{v_{L02}}{325}$$

b.

Flujo factible (se incluyen para hacer más completa la respuesta). Notar que en este ejemplo los flujos en arco y en ruta son indistinguibles:

$$x_1, x_2, x_3, v_{L01}, v_{L02} \geq 0$$

$$T_{AB}^a = x_1 + x_2, \qquad T_{AB}^b = v_{L01}, \qquad T_{AC}^a = x_3, \qquad T_{AC}^b = v_{L02}$$

$$T_{AB} = T_{AB}^a + T_{AB}^b, \qquad T_{AC} = T_{AC}^a + T_{AC}^b$$

$$T_{AB} + T_{AC} = 1.000$$

Wardrop:

$$\left({c_{AB}^*}^a - c_1\right) \cdot x_1 = 0, \qquad {c_{AB}^*}^a - c_1 \leq 0$$

$$\left({c_{AB}^*}^a - c_2\right) \cdot x_2 = 0, \qquad {c_{AB}^*}^a - c_2 \leq 0$$

$${c_{AB}^*}^b = c_{L01}, \qquad {c_{AC}^*}^a = c_3, \qquad {c_{AC}^*}^b = c_{L02}$$

Partición modal:

$$T_{AB}^a = T_{AB} \frac{\exp\left(-{c_{AB}^*}^a\right)}{\exp\left(-{c_{AB}^*}^a\right) + \exp\left(-{c_{AB}^*}^b\right)}, \qquad T_{AB}^b = T_{AB} \frac{\exp\left(-{c_{AB}^*}^b\right)}{\exp\left(-{c_{AB}^*}^a\right) + \exp\left(-{c_{AB}^*}^b\right)} \ (*)$$

$$T_{AC}^a = T_{AC} \frac{\exp\left(-{c_{AC}^*}^a\right)}{\exp\left(-{c_{AC}^*}^a\right) + \exp\left(-{c_{AC}^*}^b\right)}, \qquad T_{AC}^b = T_{AC} \frac{\exp\left(-{c_{AC}^*}^b\right)}{\exp\left(-{c_{AC}^*}^a\right) + \exp\left(-{c_{AC}^*}^b\right)} \ (*)$$

Distribución:

$$T_{AB} = 1.000 \frac{\exp\left(-0{,}1 \cdot (L_{AB}^* - 30)\right)}{\exp\left(-0{,}1 \cdot (L_{AB}^* - 30)\right) + \exp\left(-0{,}1 \cdot (L_{AC}^* - 40)\right)}$$

$$T_{AC} = 1.000 \frac{\exp\left(-0{,}1 \cdot (L_{AC}^* - 40)\right)}{\exp\left(-0{,}1 \cdot (L_{AB}^* - 30)\right) + \exp\left(-0{,}1 \cdot (L_{AC}^* - 40)\right)} \ (*)$$

$$L_{AB}^* = -\ln\left(\exp\left(-{c_{AB}^*}^a\right) + \exp\left(-{c_{AB}^*}^b\right)\right)$$

$$L_{AC}^* = -\ln\left(\exp\left(-{c_{AC}^*}^a\right) + \exp\left(-{c_{AC}^*}^b\right)\right)$$

(*) Estas tres son redundantes con las condiciones de flujo factible, se pueden omitir.

c.

$$\min Z = 50 \cdot x_1 + \frac{x_1^2}{80} + 45 \cdot x_2 + \frac{x_2^2}{40} + 60 \cdot x_3 + \frac{x_3^2}{40} + 53{,}7 \cdot v_{L01} + \frac{v_{L01}^2}{200} + 67{,}5 \cdot v_{L02} + \frac{2 \cdot v_{L02}^2}{325}$$

$$+9 \cdot T_{AB} \cdot (\ln T_{AB} - 1) + 9 \cdot T_{AC} \cdot (\ln T_{AC} - 1) - 30 \cdot T_{AB} - 40 \cdot T_{AC}$$

$$+T_{AB}^a \cdot (\ln T_{AB}^a - 1) + T_{AB}^b \cdot \left(\ln T_{AB}^b - 1\right) + T_{AC}^a \cdot (\ln T_{AC}^a - 1) + T_{AC}^b \cdot \left(\ln T_{AC}^b - 1\right)$$

s.a:

$$x_1 + x_2 = T_{AB}^a, \qquad x_3 = T_{AC}^a, \qquad v_{L01} = T_{AB}^b, \qquad v_{L02} = T_{AC}^b$$

$$T_{AB}^a + T_{AB}^b = T_{AB}, \qquad T_{AC}^a + T_{AC}^b = T_{AC}, \qquad T_{AB} + T_{AC} = 1.000$$

$$x_1, x_2, x_3, v_{L01}, v_{L02} \geq 0$$

d.

$$x_1, x_2, x_3, v_{L01}, v_{L02} = 200$$

Wardrop:

$$c_1 = 55, \qquad c_2 = 55$$

La solución satisface Wardrop.

Partición modal:

$$c_{AB}^{*\,a} = 55, \qquad c_{AB}^{*\,b} \approx 55{,}7, \qquad c_{AC}^{*\,a} = 70, \qquad c_{AC}^{*\,b} \approx 70$$

$$T_{AB}^a = 400, \qquad T_{AB}^b = 200, \qquad T_{AC}^a = 200, \qquad T_{AB}^b = 200$$

$$T_{AB}^a = T_{AB} \frac{\exp(-55)}{\exp(-55) + \exp(-55{,}7)} \approx 400$$

$$T_{AC}^a = T_{AC} \frac{\exp(-70)}{\exp(-70) + \exp(-70)} = 200$$

La solución es acorde a una partición modal tipo logit.

Distribución:

$$L_{AB}^* = -\ln(\exp(-55) + \exp(-55{,}7)) = 54{,}60$$

$$L_{AC}^* = -\ln(\exp(-70) + \exp(-70)) = 69{,}31$$

$$T_{AB} = 1.000 \frac{\exp\left(-0{,}1 \cdot (54{,}60 - 30)\right)}{\exp\left(-0{,}1 \cdot (54{,}60 - 30)\right) + \exp\left(-0{,}1 \cdot (69{,}31 - 40)\right)} \approx 615$$

Como $T_{AB} = T_{AB}^a + T_{AB}^b = 600$, la distribución no corresponde a un equilibrio. Esto implica entonces que esta solución no satisface las condiciones globales de equilibrio tampoco.

e.

Auto:

$$c_1 = 50 + \frac{x_1}{40}, \qquad c_2 = 45 + \frac{x_2 + 3 \cdot 8}{40} = 45{,}6 + \frac{x_2}{40}, \qquad c_3 = 60 + \frac{x_3 + 3 \cdot 10}{40} = 60{,}75 + \frac{x_3}{40}$$

Bus:

$$c_{L01} = 45{,}6 + \frac{x_2}{40} + \frac{60}{8} + \frac{8 \cdot v_{L01}}{8 \cdot 100} = 53{,}1 + \frac{x_2}{40} + \frac{v_{L01}}{100}$$

$$c_{L02} = \cdots = 66{,}75 + \frac{x_3}{40} + 4 \cdot \frac{v_{L02}}{325}$$

Funciones diagonalizadas en torno a la solución de d:

Auto:

$$\hat{c}_1 = 50 + \frac{x_1}{40}, \qquad \hat{c}_2 = 45{,}6 + \frac{x_2}{40}, \qquad \hat{c}_3 = 60{,}75 + \frac{x_3}{40}$$

Bus:

$$\hat{c}_{L01} = 58{,}1 + \frac{v_{L01}}{100}$$

$$\hat{c}_{L02} = 71{,}75 + 4 \cdot \frac{v_{L02}}{325}$$

2. Considere un problema combinado de distribución – partición modal – asignación con las siguientes características:

   - La distribución es doblemente acotada, con parámetro β.
   - La parición modal se da de acuerdo a un modelo logit multinomial con parámetro λ.
   - Los conjuntos $A^m$, $\forall m \in M$, contienen los arcos asociados a cada modo, cuyas funciones de costo $c_a(f_a)$,$\forall a \in A^m$,$\forall m \in M$, son diagonales.
   - Para cada modo $m$ existe un conjunto $P_w^m$ de rutas que conectan el par $w$.
   - Los viajeros de cada modo en cada horario se asignan de acuerdo al primer principio de Wardrop.

   a. ¿Cuáles son las condiciones matemáticas que una solución de equilibrio de mercado de la situación descrita debiese satisfacer?
   b. Plantee un problema de optimización que permita resolver el problema de equilibrio antes descrito.
   c. Demuestre que una solución óptima del problema propuesto en b) debe cumplir con las condiciones de equilibrio de mercado.

**Solución:**

a.

Condiciones de equilibrio de Wardrop a nivel de par $w \in W$ para cada modo $m \in M$:

$$\begin{cases} \left(C_p - u_w^m\right) \cdot h_p = 0 \\ C_p - u_w^m \geq 0 \end{cases}, \qquad \forall w \in W, m \in M, p \in P_w^m$$

Condiciones de equilibrio de la partición modal:

$$\frac{T_w^m}{T_w} = \frac{\exp(-\lambda u_w^m)}{\sum_{m'} \exp\left(-\lambda u_w^{m'}\right)}, \qquad \forall w \in W, m \in M$$

Condiciones de equilibrio de la distribución:

$$T_w = A_i O_i B_j D_j \exp(-\beta L_w), \qquad \forall w \in W$$

Donde:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j D_j \exp(-\beta L_w)}, \qquad \forall w \in W$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i A_i O_i \exp(-\beta L_w)}, \qquad \forall w \in W$$

$$L_w = -\frac{1}{\lambda} \ln \sum_{m'} \exp\left(-\lambda C_w^{m'}\right), \qquad \forall w \in W$$

b.

$$\min Z = \sum_{m \in M} \sum_{a \in A^m} \int_0^{f_a} c_a(x) dx + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\lambda}\right) \sum_{w \in W} T_w (\ln T_w - 1) + \frac{1}{\lambda} \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} T_w^m (\ln T_w^m - 1)$$

s.a:

$$\sum_{p \in P_w^m} \delta_{ap} h_p = f_a, \qquad \forall m \in M, a \in A^m$$

$$\sum_{p \in P_w^m} h_p = T_w^m, \qquad \forall w \in W, m \in M, \qquad (u_w^m)$$

$$\sum_{m \in M} T_w^m = T_w, \qquad \forall w \in W, \qquad (u_w)$$

$$\sum_j T_w = O_i, \qquad \forall i \in N, \qquad (\mu_i)$$

$$\sum_i T_w = D_j, \qquad \forall j \in N, \qquad (\eta_j)$$

$$h_p \geq 0, \qquad \forall w \in W, m \in M, p \in P_w^m$$

c.

$$\mathcal{L}\left(h_p, T_w, T_w^m\right) = Z + \sum_w \sum_m u_w^m \left( T_w^m - \sum_{p \in P_w^m} h_p \right) + \sum_m u_w \left( T_w - \sum_{m \in M} T_w^m \right)$$
$$+ \sum_i \mu_i \left( O_i - \sum_j T_w \right) + \sum_j \eta_j \left( D_j - \sum_i T_w \right)$$

Las condiciones de equilibrio Wardrop se obtienen de las condiciones de primer orden para $h_p$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p} \cdot h_p = 0 \rightarrow \left(C_p - u_w^m\right) \cdot h_p = 0, \qquad \forall w \in W, m \in M, p \in P_w^m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p} \geq 0 \rightarrow C_p - u_w^m \geq 0, \qquad \forall w \in W, m \in M, p \in P_w^m$$

Condiciones de primer orden para $T_w^m$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_w^m} = 0 \rightarrow \frac{1}{\lambda} \ln T_w^m + u_w^m - u_w = 0, \qquad \forall w \in W, m \in M$$

$$T_w^m = \exp(\lambda u_w) \exp(-\lambda u_w^m), \qquad \forall w \in W, m \in M$$

Sumamos en $m \in M$ (*):

$$\sum_{m'} T_w^{m'} = T_w = \exp(\lambda u_w) \sum_{m'} \exp\left(-\lambda u_w^{m'}\right), \qquad \forall w \in W$$

Dividiendo las últimas dos expresiones se obtiene la condición de equilibrio para la elección de modo:

$$\frac{T_w^m}{T_w} = \frac{\exp(-\lambda u_w^m)}{\sum_{m'} \exp\left(-\lambda u_w^{m'}\right)}, \qquad \forall w \in W, m \in M$$

Ahora tomamos (*), aplicamos logaritmo y dividimos por $\lambda$ para formar $L_w$ (**):

$$\frac{1}{\lambda} \ln T_w = u_w + \underbrace{\frac{1}{\lambda} \ln \sum_{m'} \exp\left(-\lambda u_w^{m'}\right)}_{-L_w}, \qquad \forall w \in W$$

Condiciones de primer orden para $T_w$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_w} = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\lambda}\right) \ln T_w + u_w - \mu_i - \eta_j = 0, \qquad \forall w \in W$$

Reemplazamos (**):

$$\frac{1}{\beta} \ln T_w + L_w - \mu_i - \eta_j = 0, \qquad \forall w \in W$$

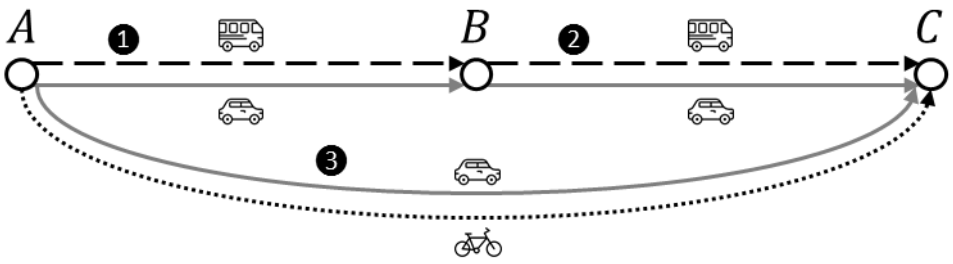
$$T_w = \exp(-\beta L_w) \underbrace{\exp(\beta \mu_i)}_{A_i O_i} \underbrace{\exp\left(\beta \eta_j\right)}_{B_j D_j}, \qquad \forall w \in W$$

3. Sobre la red que se ilustra se desea resolver un problema combinado de distribución, partición modal, y asignación, bajo los siguientes supuestos:

- El nodo $A$ genera un flujo $O_A$, que se distribuye entre los nodos $B$ y $C$, con atractividades $M_B$ y $M_C$, y con parámetro de escala $\beta$. Además, existe un flujo fijo entre B y C de $T_{BC}$.
- En cada par O-D el problema de partición modal se puede modelar como un logit multinomial de parámetro $\lambda$.
- Los usuarios se asignan a las rutas disponibles en cada modo de acuerdo a las condiciones de equilibrio dadas por el primer principio de Wardrop.
- Por los arcos 1 y 2 circulan autos y buses operando sin vías exclusivas, mientras que por el arco 3 circulan autos y bicicletas. Las bicicletas circulan por una ciclovía separada del flujo vehicular.
- El tiempo de viaje (en minutos) de un vehículo (auto o bus) circulando por un tramo $a \in \{1, 2, 3\}$ se puede modelar como $t_a = \alpha_a + \rho X_a$. En esta expresión $\alpha_a$ es el tiempo de viaje a flujo libre de $a$ (en horas), $\rho$ es un parámetro dado, y $X_a$ corresponde al flujo total del tramo (en vehículos equivalentes por hora). Considere que un bus equivale a $\eta$ autos para efectos de congestión.
- El tiempo de espera del servicio de buses en el paradero $i \in \{A, B\}$ se puede modelar como

$$w_i = \frac{1}{f} + \gamma \frac{v_i}{f\kappa}.$$

  En esta expresión, $f$ corresponde a la frecuencia nominal del servicio (en buses/hr), $v_l^i$ es el flujo total de pasajeros (en pax/hr) que compite por la capacidad de $l$ en el paradero $i$, y $\kappa_l$ es la capacidad de cada bus.
- El tiempo de viaje en bicicleta se puede modelar como constante e igual a $c_3^{bici}$.




(Íconos por Madebyoliver, www.flaticon.com)

a. **(5p)** Demuestre matemáticamente que la ruta de bus consistente en viajar de A a B, bajarse, y luego viajar de B a C, no puede llevar flujo en la solución de equilibrio. ¿Qué implica esto para el problema de asignación de pasajeros en el modo bus?
b. **(10p)** Plantee las restricciones y variables que definen un flujo factible en este problema de equilibrio.

c. **(10p)** Formule las funciones de costo necesarias para resolver este problema de equilibrio.
d. **(20p)** Plantee en forma matemática las condiciones de equilibrio de mercado para el problema descrito.
e. **(5p)** ¿Posee problema de optimización equivalente este problema de equilibrio? En caso afirmativo, plantee la función objetivo de este problema (en forma específica a esta red). En caso contrario, plantee una versión diagonalizada de esta función objetivo, en torno a la solución donde todos los viajes se realizan en bus, y donde $T_{AB} = T_{AC} = O_A/2$.

**Solución:**

a.

El costo de la ruta A-B-C es $t_1 + w_A + t_2 + w_B$. El de la ruta A-C es $t_1 + w_A + t_2$. Es decir, la ruta A-B-C es siempre más cara que la ruta A-C ya que tiene la espera adicional en B. Esto implica que la ruta A-B-C no llevará nunca flujo, y que los usuarios que viajan en bus de A a C lo harán todos en forma directa.

b.

- $h_3$: Flujo de autos que usan la ruta 3 para ir de A a C.
- $h_{1-2}$: Flujo de autos que usan la ruta 1-2 para ir de A a C.
- $x_a^m$: Flujo en el arco $a \in \{1,2,3\}$ del modo $m = \{auto, bus, bici\}$.
- $x_4^{bus}$: Flujo que viaja en bus directo de A a C.
- $T_w^m$: Flujo total del par $w = \{AB, AC, BC\}$ que utiliza el modo $m$.
- $T_w$: Flujo total del par $w$.

Dominio factible $\Omega$:

$$h_{1-2} + h_3 = T_{AC}^{auto}$$

$$x_1^{auto} = h_{1-2} + T_{AB}^{auto}, \qquad x_2^{auto} = h_{1-2} + T_{BC}^{auto}, \qquad x_3^{auto} = h_3$$

$$x_1^{bus} = T_{AB}^{bus}, \qquad x_2^{bus} = T_{BC}^{bus}, \qquad x_4^{bus} = T_{AC}^{bus}$$

$$x_3^{bici} = T_{AC}^{bici}$$

$$T_{AB}^{auto} + T_{AB}^{bus} = T_{AB}, \qquad T_{AC}^{auto} + T_{AC}^{bus} + T_{AC}^{bici} = T_{AC}, \qquad T_{BC}^{auto} + T_{BC}^{bus} = T_{BC}$$

$$T_{AB} + T_{AC} = O_A$$

$$h_{1-2}, h_3, x_1^{auto}, \dots, x_4^{bus} \geq 0$$

c.

$$c_1^{auto} = \alpha_1 + \rho(x_1^{auto} + \eta f)$$

$$c_2^{auto} = \alpha_2 + \rho(x_2^{auto} + \eta f)$$

$$c_3^{auto} = \alpha_3 + \rho x_3^{auto}$$

$$c_1^{bus} = \alpha_1 + \rho(x_1^{auto} + \eta f) + \frac{1}{f} + \gamma \frac{x_1^{bus} + x_4^{bus}}{f\kappa}$$

$$c_2^{bus} = \alpha_2 + \rho(x_2^{auto} + \eta f) + \frac{1}{f} + \gamma \frac{x_2^{bus} + x_4^{bus}}{f\kappa}$$

$$c_4^{bus} = \alpha_1 + \rho(x_1^{auto} + \eta f) + \alpha_2 + \rho(x_2^{auto} + \eta f) + \frac{1}{f} + \gamma \frac{x_1^{bus} + x_4^{bus}}{f\kappa}$$

$$c_3^{bici}$$

d.

$$(c_1^{auto} + c_2^{auto} - C_{AC}^{auto}) \cdot h_{1-2} = 0, \qquad c_1^{auto} + c_2^{auto} - C_{AC}^{auto} \geq 0$$

$$(c_3^{auto} - C_{AC}^{auto}) \cdot h_3 = 0, \qquad c_3^{auto} - C_{AC}^{auto} \geq 0$$

$$C_{AB}^{auto} = c_1^{auto}, \qquad C_{BC}^{auto} = c_2^{auto}$$

$$C_{AB}^{bus} = c_1^{bus}, \qquad C_{BC}^{bus} = c_2^{bus}, \qquad C_{AC}^{bus} = c_4^{bus}$$

$$C_{AC}^{bici} = c_3^{bici}$$

$$\frac{T_{AB}^{auto}}{T_{AB}} = \frac{\exp(-\lambda C_{AB}^{auto})}{\exp(-\lambda C_{AB}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{AB}^{bus}\right)}, \qquad \frac{T_{AB}^{bus}}{T_{AB}} = \frac{\exp\left(-\lambda C_{AB}^{bus}\right)}{\exp(-\lambda C_{AB}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{AB}^{bus}\right)}$$

$$\frac{T_{BC}^{auto}}{T_{BC}} = \frac{\exp(-\lambda C_{BC}^{auto})}{\exp(-\lambda C_{BC}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{BC}^{bus}\right)}, \qquad \frac{T_{BC}^{bus}}{T_{BC}} = \frac{\exp\left(-\lambda C_{BC}^{bus}\right)}{\exp(-\lambda C_{BC}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{BC}^{bus}\right)}$$

$$\frac{T_{AC}^{auto}}{T_{AC}} = \frac{\exp(-\lambda C_{AC}^{auto})}{\exp(-\lambda C_{AC}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bus}\right) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bici}\right)}$$

$$\frac{T_{AC}^{bus}}{T_{AC}} = \frac{\exp\left(-\lambda C_{AC}^{bus}\right)}{\exp(-\lambda C_{AC}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bus}\right) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bici}\right)}$$

$$\frac{T_{AC}^{bici}}{T_{AC}} = \frac{\exp\left(-\lambda C_{AC}^{bici}\right)}{\exp(-\lambda C_{AC}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bus}\right) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bici}\right)}$$

$$L_{AB} = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\exp(-\lambda C_{AB}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{AB}^{bus}\right)\right)$$

$$L_{AC} = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\exp(-\lambda C_{AC}^{auto}) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bus}\right) + \exp\left(-\lambda C_{AC}^{bici}\right)\right)$$

$$\frac{T_{AB}}{O_A} = \frac{\exp\left(-\beta(L_{AB} - M_B)\right)}{\exp\left(-\beta(L_{AB} - M_B)\right) + \exp\left(-\beta(L_{AC} - M_C)\right)}$$

$$\frac{T_{AC}}{O_A} = \frac{\exp\left(-\beta(L_{AC} - M_C)\right)}{\exp\left(-\beta(L_{AB} - M_B)\right) + \exp\left(-\beta(L_{AC} - M_C)\right)}$$

e.

No, porque no es simétrico. La solución para diagonalizar es:

$$x_1^{auto} = 0, \qquad x_2^{auto} = 0, \qquad x_3^{auto} = 0$$

$$x_1^{bus} = \frac{O_a}{2}, \qquad x_2^{bus} = T_{BC}, \qquad x_4^{bus} = \frac{O_a}{2}$$

$$x_3^{bici} = 0$$

Los costos diagonalizados son:

$$\hat{c}_a^{auto} = c_a^{auto}(x_a^{auto}), \qquad a \in \{1, 2, 3\}$$

$$\hat{c}_1^{bus} = \alpha_1 + \rho\eta f + \frac{1}{f} + \gamma \frac{x_1^{bus} + \frac{O_a}{2}}{f\kappa}$$

$$\hat{c}_2^{bus} = \alpha_2 + \rho\eta f + \frac{1}{f} + \gamma \frac{x_2^{bus} + \frac{O_a}{2}}{f\kappa}$$

$$\hat{c}_4^{bus} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\rho\eta f + \frac{1}{f} + \gamma \frac{\frac{O_a}{2} + x_4^{bus}}{f\kappa}$$

$$\hat{c}_3^{bici} = c_3^{bici}$$

4. Considere el problema de distribución – partición modal – asignación con las siguientes características:

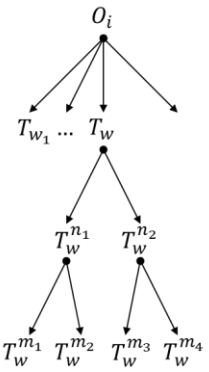
   - Existen cuatro modos: los modos privados ($m_1$ y $m_2$) y los modos públicos ($m_3$ y $m_4$).
   - La partición modal es jerárquica con dos nidos: uno agrupando los modos $m_1$ y $m_2$, y el otro agrupando los modos $m_3$ y $m_4$.
   - Los viajeros de cada modo escogen sus rutas de acuerdo al primer principio de Wardrop.
   - La distribución es simplemente acotada con atractividades $M_j$.
   - Cada modo $m_k$ opera sobre un conjunto de arcos $A_k$. Todos los modos están disponibles en todos los pares O/D.
   - Las funciones de costo $c_a(f_a)$ con $a \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ son diagonales.

   a. Plantee un problema de optimización que permita encontrar el equilibrio de mercado para el sistema descrito.
   b. Muestre que las condiciones de optimalidad del problema planteado corresponden a las condiciones de equilibrio deseadas.

**Solución:**

a.

El proceso de decisión detrás del modelo es el siguiente:




| Decisión | Param. escala | Entropía nodo | Entropía nodo (aproximada) |
|---|---|---|---|
| Destino (distribución) | $\beta$ | $\frac{O_i!}{\prod_j T_w!}$ | $z_i = O_i(\ln O_i - 1) - \sum_j T_w(\ln T_w - 1)$ |
| Nido (público / privado) | $\lambda$ | $\frac{T_w!}{\prod_n T_w^n!}$ | $z_w = T_w(\ln T_w - 1) - \sum_n T_w^n(\ln T_w^n - 1)$ |
| Modo | $\gamma_n$ | $\frac{T_w^n!}{\prod_{m\in m_n} T_w^m!}$ | $z_{w,n} = T_w^n(\ln T_w^n - 1) - \sum_{m\in m_n} T_w^m(\ln T_w^m - 1)$ |

La función de entropía aproximada a **minimizar** es, por lo tanto:

$$E = -\sum_i \frac{1}{\beta} z_i - \sum_w \frac{1}{\lambda} z_w - \sum_w \sum_n \frac{1}{\gamma_n} z_{w,n}$$

$$E = \frac{1}{\beta}\sum_w T_w(ln\, T_w - 1) - \frac{1}{\beta}\sum_i O_i(ln\, O_i - 1)$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_w \sum_n T_w^n(ln\, T_w^n - 1) - \frac{1}{\lambda}\sum_w T_w(ln\, T_w - 1)$$

$$+\sum_w \sum_n \frac{1}{\gamma_n}\sum_{m_n} T_w^m(ln\, T_w^m - 1) - \sum_w \sum_n \frac{1}{\gamma_n} T_w^n(ln\, T_w^n - 1)$$

Reordenando, eliminando el término constante, y sumando los términos de atractividad y de asignación, podemos plantear el problema de optimización equivalente como:

$$\min Z = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)dx + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\lambda}\right)\sum_w T_w(ln\, T_w - 1) - \sum_w M_j T_w$$
$$+\sum_n \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma_n}\right)\sum_w T_w^n(ln\, T_w^n - 1) + \sum_w \sum_n \frac{1}{\gamma_n}\sum_{m_n} T_w^m(ln\, T_w^m - 1)$$

Sujeto a:

$$\sum_j T_w = O_i, \qquad \forall i$$

$$\sum_n T_w^n = T_w, \qquad \forall w$$

$$\sum_{m\in m_n} T_w^m = T_w^n, \qquad \forall n, \forall w$$

$$\sum_{p \in P_w^m} h_p = T_w^m, \qquad \forall w, \forall m$$

$$\sum_p \delta_{ap} h_p = f_a, \qquad \forall a$$

$$h_p \geq 0$$

b.

El lagrangeano del problema es:

$$\mathcal{L}(H, T_w, T_w^n, T_w^m) = Z(f_a(H), T_w, T_w^n, T_w^m) + \sum_i \mu_i \left( O_i - \sum_j T_w \right) + \sum_w u_w \left( T_w - \sum_n T_w^n \right) + \sum_n \sum_w u_w^n \left( T_w^n - \sum_{m \in m_n} T_w^m \right) + \sum_w \sum_m u_w^m \left( T_w^m - \sum_{p \in P_w^m} h_p \right)$$

Las condiciones de equilibrio Wardrop se obtienen de las condiciones de primer orden para $h_p$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p} \cdot h_p = 0 \rightarrow \left( C_p - u_w^m \right) \cdot h_p = 0, \qquad \forall w, \forall m, \forall p \in P_w^m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p} \geq 0 \rightarrow C_p - u_w^m \geq 0, \qquad \forall w, \forall m, \forall p \in P_w^m$$

Condiciones de primer orden para $T_w^m$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_w^m} = 0 \rightarrow \frac{1}{\gamma_n} \ln T_w^m + u_w^m - u_w^n = 0, \qquad \forall w, \forall m$$

$$T_w^m = \exp(\gamma_n u_w^n) \exp(-\gamma_n u_w^m), \qquad \forall w, \forall m$$

Sumamos en $m \in m_n$ (es decir, los modos del mismo nido) (*):

$$\sum_{m' \in m_n} T_w^{m'} = T_w^n = \exp(\gamma_n u_w^n) \sum_{m' \in m_n} \exp\left(-\gamma_n u_w^{m'}\right), \qquad \forall w, \forall n$$

Dividiendo las últimas dos expresiones se obtiene la condición de equilibrio para la elección de modo dentro de un nido (notar que $n$ corresponde al nido de $m$):

$$\frac{T_w^m}{T_w^n} = \frac{\exp(-\gamma_n u_w^m)}{\sum_{m' \in m_n} \exp\left(-\gamma_n u_w^{m'}\right)}, \qquad \forall w, \forall m$$

Ahora tomamos (*), aplicamos logaritmo y dividimos por $\lambda$ para formar $L_w^n$ (**):

$$\frac{1}{\gamma_n}\ln T_w^n = u_w^n + \underbrace{\frac{1}{\gamma_n}\ln \sum_{m' \in m_n} \exp\left(-\gamma_n u_w^{m'}\right)}_{-L_w^n}, \qquad \forall w, \forall n$$

Condiciones de primer orden para $T_w^n$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_w^n} = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma_n}\right)\ln T_w^n + u_w^n - u_w = 0, \qquad \forall w, \forall n$$

Reemplazamos (**):

$$\frac{1}{\lambda}\ln T_w^n + L_w^n - u_w = 0, \qquad \forall w, \forall n$$

Despejamos $t_w^n$:

$$T_w^n = \exp(\lambda u_w)\exp(-\lambda L_w^n), \qquad \forall w, \forall n$$

Sumando en $n$ (***):

$$\sum_{n'} T_w^{n'} = T_w = \exp(\lambda u_w)\sum_{n'} \exp\left(-\lambda L_w^{n'}\right), \qquad \forall w$$

Dividimos las dos últimas expresiones para obtener las condiciones de equilibrio dentro de un par $w$ (reparto entre nidos):

$$\frac{T_w^n}{T_w} = \frac{\exp(-\lambda L_w^n)}{\sum_{n'} \exp\left(-\lambda L_w^{n'}\right)}, \qquad \forall w, \forall n$$

Tomamos (***) y construimos una nueva logsuma:

$$\frac{1}{\lambda}\ln T_w = u_w + \underbrace{\frac{1}{\lambda}\ln \sum_{n} \exp(-\lambda L_w^n)}_{-L_w}, \qquad \forall w$$

Condiciones de primer orden para $T_w$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_w} = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\lambda}\right)\ln T_w + u_w - M_j - \mu_i = 0, \qquad \forall w$$

Reemplazamos $L_w$ y despejamos $T_w$:

$$\frac{1}{\beta}\ln T_w + L_w - M_j - \mu_i = 0, \qquad \forall w$$

$$T_w = \exp(\beta\mu_i)\exp\left(-\beta\left(L_w - M_j\right)\right), \qquad \forall w$$

Sumamos en $j$:

$$\sum_{j} T_w = O_i = \exp(\beta\mu_i)\sum_{j'} \exp\left(-\beta\left(L_w - M_{j'}\right)\right), \qquad \forall w$$

Dividimos las dos últimas expresiones para obtener las condiciones de equilibrio a nivel de la distribución:

$$\frac{T_w}{O_i} = \frac{\exp\left(-\beta\left(L_w - M_j\right)\right)}{\sum_{j'} \exp\left(-\beta\left(L_w - M_{j'}\right)\right)}, \qquad \forall w$$

Con esto queda demostrado que la solución óptima del problema equivalente debe satisfacer las condiciones de equilibrio, que son las expresiones destacadas en gris.

5. Se desea modelar un sistema para el que la matriz de viajes dada por $T_w$ es fija y conocida. Este sistema posee dos modos, cada uno operando en una red independiente: el modo $m_1$, cuyos usuarios se asignan de acuerdo al primer principio de Wardrop sobre la red de arcos $A_1$, y el modo $m_2$, cuyos usuarios se asignan en forma estocástica con parámetro $\gamma$ sobre la red $A_2$ (es decir, los modos no comparten infraestructura), con $A_1 \cup A_2 = A$. El reparto entre modos se puede modelar como entrópico con parámetro $\lambda$. Ambos sistemas presentan funciones de costo diagonal por arco. Se propone el problema de optimización equivalente que se entrega para modelar el sistema. Se define el conjunto $P_w^m$ como el formado por las rutas para el par $w$ dentro de la red del modo $m$, $A_m$.

    a. Plantee las condiciones que debe satisfacer la solución de equilibrio buscada.
    b. Muestre que una solución óptima del problema planteado cumple con dichas condiciones de equilibrio.

$$\min Z = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} c_a(x)dx + \frac{1}{\gamma} \sum_w \sum_{p \in P_w^2} h_p\left(\ln h_p - 1\right) - \frac{1}{\gamma} \sum_w T_w^{m_2}\left(\ln T_w^{m_2} - 1\right) + \frac{1}{\lambda} \sum_w \sum_m T_w^m (\ln T_w^m - 1)$$

s.a.

$$T_w^{m_1} + T_w^{m_2} = T_w, \qquad \forall w, \qquad (u_w)$$

$$\sum_{p \in P_w^m} h_p = T_w^m, \qquad \forall w, m, \qquad (u_w^m)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p\,, \qquad \forall a$$

$$f_a \geq 0, \qquad \forall a$$

**Solución:**

Construimos el lagrangeano:

$$\mathcal{L}\left(h_p, T_w^m\right) = \sum_{a\in A}\int_0^{f_a} c_a(x)dx + \frac{1}{\gamma}\sum_w \sum_{p\in P_w^2} h_p\left(\ln h_p - 1\right) - \frac{1}{\gamma}\sum_w T_w^{m_2}\left(\ln T_w^{m_2} - 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\sum_w \sum_m T_w^m(\ln T_w^m - 1) + \sum_w u_w\left(T_w - T_w^{m_1} - T_w^{m_2}\right)$$
$$+ \sum_w \sum_m u_w^m\left(T_w^m - \sum_{p\in P_w^m} h_p\right)$$

Notamos que la derivada con respecto a $h_p$ depende de a qué modo corresponde $p$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p} = \begin{cases} C_p - u_w^{m_1}, & p \in P_1 \\ C_p - \frac{1}{\gamma}\ln h_p - u_w^{m_2}, & p \in P_2 \end{cases}$$

Aquí $P_k$ es el conjunto de rutas del modo $m_k$. Las condiciones de optimalidad para $h_p \in P_1$ deben considerar la restricción $h_p \geq 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p}\cdot h_p = 0 \Rightarrow \left(C_p - u_w^{m_1}\right)\cdot h_p = 0, \qquad \forall p \in P_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p} \geq 0 \Rightarrow C_p \geq u_w^{m_1}, \qquad \forall p \in P_1$$

Esto implica que para $p \in P_1$ se debe satisfacer Wardrop. Para $p \in P_2$ no es necesario imponer la no negatividad, ya que $\ln(h_p)$ solo está definido para $h_p > 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p} = 0 \Rightarrow C_p - \frac{1}{\gamma}\ln h_p - u_w^{m_2} = 0, \qquad \forall p \in P_2$$

$$h_p = \exp\left(\gamma u_w^{m_2}\right)\exp\left(-\gamma C_p\right), \qquad \forall p \in P_2$$

Sumamos la expresión anterior para $p \in P_w^2$ (*):

$$\sum_{p\in P_w^2} h_p = T_w^{m_2} = \exp\left(\gamma u_w^{m_2}\right)\sum_{p\in P_w^2}\exp\left(-\gamma C_p\right), \qquad \forall w$$

Dividimos las últimas dos expresiones:

$$h_p = T_w^{m_2}\frac{\exp\left(-\gamma C_p\right)}{\sum_{q\in P_w^2}\exp\left(-\gamma C_q\right)}, \qquad \forall p \in P_2$$

Esto implica que la asignación para $p \in P_2$ es estocástica.

Tomamos ahora la condición de primer orden asociada a $T_w^m$. Analizamos primero el caso $m \in m_1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_w^{m_1}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\ln T_w^{m_1} - u_w + u_w^{m_1} = 0, \qquad \forall w$$

$$T_w^{m_1} = \exp\left(-\lambda u_w^{m_1}\right)\cdot \exp(\lambda u_w), \qquad \forall w$$

Ahora analizamos $m \in m_2$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_w^{m_2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\ln T_w^{m_2} - \frac{1}{\gamma}\ln T_w^{m_2} - u_w + u_w^{m_2} = 0, \qquad \forall w$$

Desarrollando (*) y reemplazando en la expresión anterior:

$$\frac{1}{\gamma}\ln\left(T_w^{m_2}\right) = u_w^{m_2} + \frac{1}{\gamma}\ln \sum_{p \in P_w^2} \exp\left(-\gamma C_p\right), \qquad \forall w$$

$$\frac{1}{\lambda}\ln T_w^{m_2} - u_w = \frac{1}{\gamma}\ln \sum_{p \in P_w^2} \exp\left(-\gamma C_p\right) := -L_w^{m_2}, \qquad \forall w$$

$$T_w^{m_2} = \exp\left(-\lambda L_w^{m_2}\right) \cdot \exp(\lambda u_w), \qquad \forall w$$

A partir de que $T_w^{m_1} + T_w^{m_2} = T_w$ construimos $T_w^m / T_w$:

$$\frac{T_w^{m_1}}{T_w} = \frac{T_w^{m_1}}{T_w^{m_1} + T_w^{m_2}} = \frac{\exp\left(-\lambda u_w^{m_1}\right)}{\exp\left(-\lambda u_w^{m_1}\right) + \exp\left(-\lambda L_w^{m_2}\right)}, \qquad \forall w$$

$$\frac{T_w^{m_2}}{T_w} = \frac{T_w^{m_2}}{T_w^{m_1} + T_w^{m_2}} = \frac{\exp\left(-\lambda L_w^{m_2}\right)}{\exp\left(-\lambda u_w^{m_1}\right) + \exp\left(-\lambda L_w^{m_2}\right)}, \qquad \forall w$$

Por lo tanto, se satisfacen también las condiciones de la partición modal.

6. (Propuesto) Considere el problema de distribución – partición modal – asignación con las siguientes características:

   - Existen dos tipos de modo: los modos privados ($m$) y los modos públicos ($m'$).
   - La partición modal es jerárquica con dos nidos: uno agrupando los modos de transporte privado, y el otro agrupando los modos de transporte público.
   - Los viajeros de cada uno de los modos escogen sus rutas de acuerdo al primer principio de Wardrop.
   - La distribución es simplemente acotada a orígenes, con atractividades $M_i$.
   - Los arcos de transporte privado corresponden al conjunto $A$, y los de transporte público al conjunto $A'$.
   - Las funciones de costo $c_a(f_a)$ con $a \in A \cup A'$ son diagonales.

   a. Plantee un problema de optimización que permita encontrar el equilibrio de mercado para el sistema descrito.
   b. Demuestre que una solución óptima del problema propuesto en a) debe cumplir con las condiciones de equilibrio de tráfico para cada modo.
   c. Suponga que las funciones de costo para cierto modo son no diagonales y asimétricas. Plantee un problema que permita encontrar el equilibrio en esta nueva situación.