Guía de ejercicios
Capitulo 11 y 12

Dudas al mail antonia.alcayaga@uc.cl

Pregunta 1

Se desea modelar un sistema para el que la matriz de viajes dada por T_w es fija y conocida. Este sistema posee dos modos, cada uno operando en una red independiente: el modo m_1, cuyos usuarios se asignan de acuerdo al primer principio de Wardrop sobre la red de arcos A_1 , y el modo m_2 , cuyos usuarios se asignan en forma estocástica con parámetro γ sobre la red A_2 (es decir, los modos no comparten infraestructura), con $A_1 \cup A_2 = A$. El reparto entre modos se puede modelar como entrópico con parámetro λ. Ambos sistemas presentan funciones de costo diagonal por arco. Se propone el problema de optimización equivalente que se entrega para modelar el sistema. Se define el conjunto P_w^m como el formado por las rutas para el par w dentro de la red del modo m, A_m . Plantee las condiciones que debe satisfacer la solución de equilibrio buscada.

Respuesta:

Planteando el problema

$$\min Z = \sum_{a\in A}\int_0^{f_a} c_a(x)dx + \frac{1}{\gamma}\sum_w \sum_{p\in P_w^2} h_p\left(\ln h_p - 1\right) - \frac{1}{\gamma}\sum_w T_w^{m_2}\left(\ln T_w^{m_2} - 1\right) + \frac{1}{\lambda}\sum_w\sum_m T_w^m(\ln T_w^m - 1)$$

s.a.

$$T_w^{m_1} + T_w^{m_2} = T_w, \qquad \forall w, \qquad (u_w)$$

$$\sum_{p\in P_w^m} h_p = T_w^m, \qquad \forall w, m, \qquad (u_w^m)$$

$$f_a = \sum_{p\in P} \delta_{ap} h_p\,, \qquad \forall a$$

$$f_a \geq 0, \qquad \forall a$$

Condiciones de equilibrio

Derivando las condiciones de optimalidad del problema se obtienen las siguientes condiciones de equilibrio:

1. Asignación

Modo1- Wardrop. Estas condiciones se deben cumplir para cualquier ruta en la red del modo 1

$$\left(c_p - u_w^{m1}\right) \cdot h_p = 0$$

$$c_p \geq u_w^{m1}$$

Modo 2- Asignación estocástica. Estas condiciones se deben cumplir para cualquier ruta en la red del modo 1

$$h_p = T_w^{m2} \frac{\exp\left(-\gamma c_p\right)}{\sum_{p' \in P_w^{m2}} \exp\left(-\gamma c_p\right)}$$

2. Partición Modal MNL

$$T_w^{m1} = T_w \frac{\exp\left(-\lambda u_w^{m1}\right)}{\exp(-\lambda u_w^{m1}) + \exp\left(-\lambda L_p\right)}$$
$$T_w^{m2} = T_w \frac{\exp\left(-\lambda L_p\right)}{\exp(-\lambda u_w^{m1}) + \exp\left(-\lambda L_p\right)}$$

Con $L_p = -\frac{1}{\gamma} ln \sum_{\{p \in P_2\}} \exp\left(-\gamma c_p\right)$

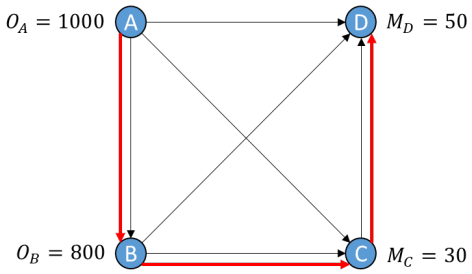
Problema 2

Sobre la red que se entrega, considere un problema de distribución / partición modal / asignación con las siguientes características:

i. La generación está dada por $O_A = 1.000$ y $O_B = 800$ viajes por hora.
ii. La distribución es simplemente acotada a orígenes con parámetro de escala $\beta = 0{,}1$. Los viajes son capturados por los nodos C y D, con atractividades $M_C = 30$ y $M_D = 50$.
iii. Los usuarios escogen modo (auto o bus) de acuerdo a un modelo logit multinomial con parámetro λ.
iv. Las funciones de tiempo de viaje (en minutos) del modo auto son las que se entregan. Los arcos del modo auto se muestran en líneas delgadas.
v. El modo bus corresponde a una única línea, cuyo trazado se entrega en rojo, con los tiempos fijos de viaje (en minutos) que se entregan. La línea opera con frecuencia de 6 buses por hora. El tiempo de espera para abordar presenta congestión, y se puede modelar como:

$$w_i = \frac{k}{f_l} + 10\frac{x_i}{K_l}$$

En esta expresión x_i corresponde al flujo que aborda en el nodo i. El significado del resto de los parámetros es el habitual utilizado en el curso.
vi. Los usuarios dentro de cada modo escogen ruta de acuerdo al primer principio de Wardrop.



$c_{AB} = 20 + 0{,}2 \cdot f_{AB}$
$c_{AC} = 35 + 0{,}2 \cdot f_{AC}$
$c_{AD} = 50 + 0{,}3 \cdot f_{AD}$
$c_{BC} = 20 + 0{,}1 \cdot f_{BC}$
$c_{BD} = 35 + 0{,}2 \cdot f_{BD}$
$c_{CD} = 20 + 0{,}1 \cdot f_{CD}$

a. Construya el conjunto de restricciones que debe satisfacer una asignación factible (no necesariamente de equilibrio) para este problema. Defina toda la notación introducida.
b. ¿Cuáles son las condiciones que debe satisfacer una asignación factible (además de las especificadas en el punto a) para corresponder a un equilibrio de mercado en esta red? Expréselas matemáticamente en forma específica para esta red.

Respuesta

a) Definimos las variables de flujo en ruta para auto:

$$h^a_{ABC}, h^a_{AC}, h^a_{ABCD}, h^a_{ABD}, h^a_{ACD}, h^a_{AD}, h^a_{BCD}, h^a_{BD}, h^a_{CD}$$

Y para los buses (es necesario considerar un arco por sección de ruta, para modelar los tiempos de espera):

$$h^b_{ABC}, h^b_{ABCD}, h^b_{BCD}, h^b_{CD}$$

Distribución:

$$O_A = 1.000 = T_{AC} + T_{AD}, \qquad O_B = 800 = T_{BC} + T_{BD}$$

Partición modal:

$$T_{AC} = T^a_{AC} + T^b_{AC}, \qquad T_{AD} = T^a_{AD} + T^b_{AD}, \qquad T_{BC} = T^a_{BC} + T^b_{BC}, \qquad T_{BD} = T^a_{BD} + T^b_{BD}$$

Demanda par / modo:

$$T^m_{AC} = h^m_{ABC} + h^m_{AC}, \qquad m = a, b$$
$$T^m_{AD} = h^m_{ABCD} + h^m_{ABD} + h^m_{ACD} + h^m_{AD}, \qquad m = a, b$$
$$T^m_{BC} = h^m_{BCD} + h^m_{BD}, \qquad m = a, b$$
$$T^m_{CD} = h^m_{CD}, \qquad m = a, b$$

Flujos en arco / ruta:

$$f^m_{AB} = h^m_{ABC} + h^m_{ABCD} + h^m_{ABD}, \qquad m = a, b$$
$$f^m_{AC} = h^m_{AC} + h^m_{ACD}, \qquad m = a, b$$
$$f^m_{AD} = h^m_{AD}, \qquad m = a, b$$
$$f^m_{BC} = h^m_{ABC} + h^m_{BC} + h^m_{BCD}, \qquad m = a, b$$
$$f^m_{BD} = h^m_{ABD} + h^m_{BD}, \qquad m = a, b$$
$$f^m_{CD} = h^m_{ABCD} + h^m_{ACD} + h^m_{BCD}, \qquad m = a, b$$

b) Wardrop:

$$(C^a_{ABC} - {C^a_{AC}}^*) \cdot h^a_{ABC} = 0, \qquad C^a_{ABC} - {C^a_{AC}}^* \geq 0$$
$$(C^a_{AC} - {C^a_{AC}}^*) \cdot h^a_{AC} = 0, \qquad C^a_{AC} - {C^a_{AC}}^* \geq 0$$
$$(C^a_{ABCD} - {C^a_{AD}}^*) \cdot h^a_{ABCD} = 0, \qquad C^a_{ABCD} - {C^a_{AD}}^* \geq 0$$
$$(C^a_{ABD} - {C^a_{AD}}^*) \cdot h^a_{ABD} = 0, \qquad C^a_{ABD} - {C^a_{AD}}^* \geq 0$$
$$(C^a_{ACD} - {C^a_{AD}}^*) \cdot h^a_{ACD} = 0, \qquad C^a_{ACD} - {C^a_{AD}}^* \geq 0$$
$$(C^a_{AD} - {C^a_{AD}}^*) \cdot h^a_{AD} = 0, \qquad C^a_{AD} - {C^a_{AD}}^* \geq 0$$
$$(C^a_{BCD} - {C^a_{BD}}^*) \cdot h^a_{BCD} = 0, \qquad C^a_{BCD} - {C^a_{BD}}^* \geq 0$$
$$(C^a_{BD} - {C^a_{BD}}^*) \cdot h^a_{BD} = 0, \qquad C^a_{BD} - {C^a_{BD}}^* \geq 0$$
$$C^a_{CD} = {C^a_{CD}}^*$$

Acá C^a_p es el costo de la ruta, que se debe obtener de los costos de los arcos. Estas funciones de costo se entregan al final. C^{a*}_w corresponde al costo de equilibrio del par w. Notar que en este contexto AC puede corresponder a la ruta o al par.
Dado que la red de secciones de arcos para los buses tiene los mismos arcos que la red de autos, sus condiciones de equilibrio son iguales que las del auto, cambiando el índice a por b.

Partición modal:

$$T^a_{AC} = T_{AC} \frac{e^{-\lambda {C^a_{AC}}^*}}{e^{-\lambda {C^a_{AC}}^*} + e^{-\lambda {C^b_{AC}}^*}}, \qquad T^b_{AC} = T_{AC} - T^a_{AC}$$
(más ídem para AD, BC, BD)

Distribución:

$$T_{AC} = 1.000 \frac{e^{-\beta(L^*_{AC} - M_C)}}{e^{-\beta(L^*_{AD} - M_D)} + e^{-\beta(L^*_{AC} - M_C)}}, \qquad T_{AD} = O_A - T_{AC}$$
$$T_{BC} = 1.000 \frac{e^{-\beta(L^*_{BC} - M_C)}}{e^{-\beta(L^*_{BD} - M_D)} + e^{-\beta(L^*_{AC} - M_C)}}, \qquad T_{BD} = O_B - T_{BC}$$

$$L^*_{AC} = \frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda C^{a}_{AC}{}^*} + e^{-\lambda C^{b}_{AC}{}^*}\right), \qquad L^*_{AD} = \frac{1}{\beta}\ln\left(e^{-\lambda C^{a}_{AD}{}^*} + e^{-\lambda C^{b}_{AD}{}^*}\right)$$

$$L^*_{BC} = \frac{1}{\beta}\ln\left(e^{-\lambda C^{a}_{BC}{}^*} + e^{-\lambda C^{b}_{BC}{}^*}\right), \qquad L^*_{BD} = \frac{1}{\beta}\ln\left(e^{-\lambda C^{a}_{BD}{}^*} + e^{-\lambda C^{b}_{BD}{}^*}\right)$$

Funciones de costo (se entregan porque técnicamente debiesen estar en la respuesta, pero se evaluaron como bonus porque el problema estaba muy largo):

$$C^a_{ABC} = c^a_{AB} + c^a_{BC}, \qquad C^a_{AC} = c^a_{AC}, \qquad C^a_{ABCD} = c^a_{AB} + c^a_{BC} + c^a_{CD}, \qquad C^a_{ABD} = c^a_{AB} + c^a_{BD},$$
$$C^a_{ACD} = c^a_{AC} + c^a_{CD}, \qquad C^a_{AD} = c^a_{AD}, \qquad C^a_{BCD} = c^a_{BC} + c^a_{CD}, \qquad C^a_{BD} = c^a_{BD}, \qquad C^a_{CD} = c^a_{CD}$$

(lo anterior también cuenta para b)

Falta expresar las funciones de costo en arco. Para el modo auto, se entregan en la figura. Para el modo bus (suponiendo que los tiempos de viaje son los de flujo libre del auto en los tramos AB, BC y CD, y que la capacidad de un bus es q), son:

$$c^b_{AB} = 20 + 10k + \frac{1{,}67}{q}\left(f^b_{AB} + f^b_{AC} + f^b_{AD}\right)$$

$$c^b_{BC} = 20 + 10k + \frac{1{,}67}{q}\left(f^b_{BC} + f^b_{BD}\right)$$

$$c^b_{CD} = 20 + 10k + \frac{1{,}67}{q}\left(f^b_{CD}\right)$$

Problema 3

Formule un problema combinado de distribución, partición modal y asignación, que posea las siguientes características. Sea riguroso con la notación.

- La distribución de viajes es simplemente acotada a orígenes, de acuerdo con la Maximización de la Entropía.

- La partición modal es Jerárquica, de acuerdo con la Maximización de la Entropía. Existen tres modos: m_1, m_2 y m_3. Los modos m_1 y m_2, están correlacionados.

  - Los modos poseen infraestructura segregada, por lo que no existen interacciones entre modos.

  - Las redes de los modos m_1 y m_2 presentan congestión. Las funciones de costo son diagonales.

  - La red del modo m_3 no posee congestión.

  - Para los modos m_2 y m_3 sus usuarios se asignan en forma estocástica a la red.

  - Los usuarios del modo m_1 se asignan de acuerdo con el primer principio de Wardrop.

Una vez formulado el problema, dibuje un árbol de decisiones, indicando claramente los parámetros de escala (i.e. ponderadores de la función objetivo) asociados a cada nivel.

a) (5 puntos) Determine las respectivas funciones de pseudo-demanda diagonales para Tw, Twn para cada caso de manera específica.

b) (5 puntos) ¿Cómo cambia el problema formulado si ahora los costos del modo m_1 presenta interacciones asimétricas?

Respuesta

Costos

$$\sum_{a \in A_1} \int_0^{f_a} c_a(x) \cdot dx + \sum_{a \in A_2} \int_0^{f_a} c_a(x) \cdot dx + \sum_{a \in A_3} c_a \cdot f_a$$

Distribución

$$\frac{1}{\beta} \cdot \sum_w T_w \cdot (ln\, T_w - 1)$$

Partición Modal Jerárquica

$$\frac{1}{\lambda}\cdot\left[\sum_{w}\{T_w^I\cdot(ln\,T_w^I-1)+T_w^3\cdot(ln\,T_w^3-1)\}-\sum_{w}T_w\cdot(ln\,T_w-1)\right]$$

$$\frac{1}{\gamma^I}\cdot\left[\sum_{w}\sum_{m=m1}^{m2}T_w^m\cdot(ln\,T_w^m-1)-\sum_{w}T_w^I\cdot(ln\,T_w^I-1)\right]$$

Asignación

$$\frac{1}{\theta^1}\cdot\left[\sum_{w}\sum_{p\in P_w^{m1}}h_p\cdot(ln\,h_p\ -1)-\sum_{w}T_w^{m1}\cdot(ln\,T_w^{m1}-1)\right]+$$
$$\frac{1}{\theta^3}\cdot\left[\sum_{w}\sum_{p\in P_w^{m3}}h_p\cdot(ln\,h_p\ -1)-\sum_{w}T_w^{m3}\cdot(ln\,T_w^{m3}-1)\right]$$

Restricciones

$$\sum_{j}T_w=O_i\ \forall\ i$$
$$T_w^I+T_w^{m3}=T_w\forall\ w$$
$$T_w^{m1}+T_w^{m2}=T_w^I\qquad\forall\ w$$
$$\sum_{p\ \in\ P_w^m}h_p=\ T_w^m\ \forall\ w,m$$
$$f_a=\sum_{p\ \in P}\delta_{ap}\cdot h_p\ \ \forall a$$
$$h_p\geq 0\ \forall p$$

a) pseudo demandas

$$g_w(T_w)=-(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\lambda})\cdot ln\,T_w$$

Partición modal

$$g_w^I(T_w^I)=-\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\gamma^I}\right)\cdot ln\,T_w^I$$
$$g_w^1(T_w^1)=-\left(\frac{1}{\gamma^I}-\frac{1}{\theta^1}\right)\cdot ln\,T_w^1$$
$$g_w^2(T_w^2)=-\frac{1}{\gamma^I}\cdot ln\,T_w^2$$

$$g_w^3(T_w^3)=-\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\theta^3}\right)\cdot ln\,T_w^3$$

b) Como los costos son asimétricos, solamente se puede plantear la desigualdad variacional de la siguiente forma.

Falta la función de pseudo demanda asociada a la asignación

$$g_{hp}^{1}(h_p^{m_1}) = -\frac{1}{\theta^1} \cdot ln\, h_p^{m_1}$$

$$g_{hp}^{3}(h_p^{m_3}) = -\frac{1}{\theta^3} \cdot ln\, h_p^{m_3}$$

$$d = \left\{costos\ de\ m1, costos\ de\ m2, costos\ de\ m3, -g1, -g2, \ldots, -gw, -g_w^I, g_w^1, g_w^2, g_w^3, g_{hp}^1, g_{hp}^2, g_{hp}^3\right\}$$

$$v = \left\{flujos, T_1, T_2, \ldots, T_w, T_w^I, T_w^1, T_w^2, T_w^3, h_p^{m_1}, h_p^{m_2}, h_p^{m_3}\right\}$$

lo mismo con v*

$$d(v*) \cdot (v - v*) \geq 0$$

sujeto a las misma restricciones.