PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Control 4
Duración: 60 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla. Específicamente, se descontará 1 décima por minuto.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su control y cargarlo** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Control 4". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después de terminar el tiempo de desarrollo del control.
- **Debe entregar la prueba física antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad**.
- Está permitido el uso de **calculadora no programable**.
- Está **prohibido el uso de otros dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la evaluación. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su evaluación a CANVAS.
- Debe escribir con **lápiz pasta**. Si quiere escribir con lápiz mina, debe asegurarse que en el escaneo se vea su prueba adecuadamente - si no, podrá ser no revisada o tendrá una penalización.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

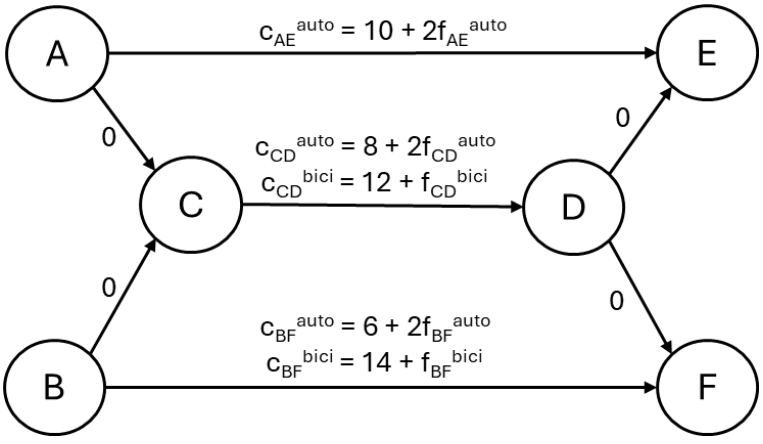
Curso: ICT3283 - Equilibrio en Redes de Transporte
Semestre: 2025 - 2
Profesora: Camila Balbontin

Control 4
Duración: 60 minutos.

Pregunta 1 (40 puntos)

Sobre la red que se presenta abajo se desea resolver un problema combinado de distribución, partición modal y asignación, bajo los siguientes supuestos:

- El nodo A genera un flujo de 100 viajes/hora y el nodo B de 80 viajes/hora, que se distribuyen entre los nodos E y F, cada uno con atractividades 30 y 0 minutos, respectivamente, y con parámetro de escala $\beta = 0.1$.
- Entre el par B-F hay viajes en auto y bicicleta; para el resto de los pares O-D solo hay viajes en auto. El problema de partición modal se puede modelar como un logit multinomial de parámetro $\lambda = 1$.
- Los usuarios se asignan a las rutas disponibles en cada modo de acuerdo con las condiciones de equilibrio dadas por el primer principio de Wardrop.
- Las bicicletas circulan en ciclovías exclusivas, separadas de los autos.
- El tiempo de viaje en minutos de cada vehículo (autos y bicicleta) por cada tramo se presenta en la figura de abajo. Note que los tiempos de viaje entre los nodos AC, BC, DE y DF se asumen despreciables y sin congestión por simplicidad.



(a) **(6 puntos)** Plantee las variables y restricciones que definen un flujo factible en este problema de equilibrio.

Solución:

[1 punto] Variables:

- ◇ T_{ij}: demanda total del par OD ij.
- ◇ T_{ij}^m: demanda del par OD ij asignada al modo m.
- ◇ x_{ij}^m: flujo de arco ij en modo m.
- ◇ h_{ij}^m: flujo de ruta del par OD ij en modo m.

[1 punto] Restricciones de distribución:

$$T_{AE} + T_{AF} = 100, \qquad T_{BE} + T_{BF} = 80$$

[1,5 puntos] Restricciones de partición modal:

$$\begin{aligned} T_{AE} &= T_{AE}^{auto} & T_{AF} &= T_{AF}^{auto} \\ T_{BE} &= T_{BE}^{auto} & T_{BF} &= T_{BF}^{auto} + T_{BF}^{bici} \end{aligned}$$

[2,5 puntos] Restricciones de asignación:

$$\begin{aligned} T_{AE}^{auto} &= h_{AE}^{auto} + h_{ACDE}^{auto} & x_{AE}^{auto} &= h_{AE}^{auto} \\ T_{AF}^{auto} &= h_{ACDF}^{auto} & x_{CD}^{auto} &= h_{ACDE}^{auto} + h_{ACDF}^{auto} + h_{BCDE}^{auto} + h_{BCDF}^{auto} \\ T_{BE}^{auto} &= h_{BCDE}^{auto} & x_{CD}^{bici} &= h_{BCDF}^{bici} \\ T_{BF}^{auto} &= h_{BF}^{auto} + h_{BCDF}^{auto} & x_{BF}^{auto} &= h_{BF}^{auto} \\ T_{BF}^{bici} &= h_{BF}^{bici} + h_{BCDF}^{bici} & x_{BF}^{bici} &= h_{BF}^{bici} \end{aligned}$$

Si se simplifica y no se incluyen algunas variables por redundancia (por ejemplo T_{AF}^{auto} y se usa T_{AF} en vez), está bien.

(b) **(6 puntos)** Indique justificadamente si este problema tiene un problema de optimización equivalente. En caso de ser así, escriba la función objetivo del problema de optimización equivalente para este caso particular.

Solución:

[1 punto justificación] Sí tiene, ya que las funciones de costo son diagonales.

[5 puntos por función objetivo desglosado en: int funciones de costos, pares OD, atractividades, pares OD a nivel de modo]

$$\begin{aligned} FO = &\int_0^{x_{AE}^{auto}} (10 + 2x)\,dx + \int_0^{x_{CD}^{auto}} (8 + 2x)\,dx + \int_0^{x_{CD}^{bus}} (12 + x)\,dx \\ &+ \int_0^{x_{BF}^{auto}} (6 + 2x)\,dx + \int_0^{x_{BF}^{bus}} (14 + x)\,dx \\ &+ 9\Big[T_{AE}(\ln T_{AE} - 1) + T_{AF}(\ln T_{AF} - 1) \\ &\quad + T_{BE}(\ln T_{BE} - 1) + T_{BF}(\ln T_{BF} - 1)\Big] \\ &- 30(T_{AE} + T_{BE}) \\ &+ \Big[T_{AE}^{auto}(\ln T_{AE}^{auto} - 1) + T_{AF}^{auto}(\ln T_{AF}^{auto} - 1) \\ &\quad + T_{BE}^{auto}(\ln T_{BE}^{auto} - 1) + T_{BF}^{auto}(\ln T_{BF}^{auto} - 1) + T_{BF}^{bici}(\ln T_{BF}^{bici} - 1)\Big]. \end{aligned}$$

(c) **(28 puntos)** Usted desea evaluar la siguiente asignación factible:

$$\left(h^{auto}_{AE}; h^{auto}_{ACDE}; h^{auto}_{ACDF}; h^{auto}_{BCDE}; h^{auto}_{BCDF}; h^{auto}_{BF}; h^{bici}_{BCDF}; h^{bici}_{BF}\right)^* = (50; 49; 1; 1; 0; 19; 31; 29)$$

Se le pide indicar si esta asignación es un equilibrio de mercado, y revisar **todas las condiciones de optimalidad** para identificar cuáles cumple y cuáles no.

Solución:

[9 puntos Wardrope, 9 puntos Partición Modal y 10 puntos Distribución. Es necesario que para cada condición alumno mínimo haya resuelto un caso para concluir que no se cumple.]

Valores:

$$T^{auto}_{AE} = 99, \quad T^{auto}_{AF} = 1, \quad T^{auto}_{BE} = 1, \quad T^{auto}_{BF} = 19, \quad T^{bici}_{BF} = 60$$

$$T_{AE} = 99, \quad T_{AF} = 1, \quad T_{BE} = 1, \quad T_{BF} = 79,$$

$$x^{auto}_{AE} = 50, \quad x^{auto}_{CD} = 51, \quad x^{bici}_{CD} = 31, \quad x^{auto}_{BF} = 19, \quad x^{bici}_{BF} = 29$$

$$C^{auto}_{x_{AE}} = 110, \quad C^{auto}_{x_{CD}} = 110, \quad C^{bici}_{x_{CD}} = 43, \quad C^{auto}_{x_{BF}} = 44, \quad C^{bici}_{x_{BF}} = 43$$

$$C^{auto}_{h_{AE}} = 110, \quad C^{auto}_{h_{ACDE}} = 110, \quad C^{auto}_{h_{ACDF}} = 110, \quad C^{auto}_{h_{BCDE}} = 110, \quad C^{auto}_{h_{BCDF}} = 110, \quad C^{bici}_{h_{BCDF}} = 43, \quad C^{auto}_{h_{BF}} = 44 \quad C^{bici}_{h_{BF}} = 43$$

Equilibrio de Wardrop:

- Par AE: $C_{h_{AE}} = C_{h_{ACDE}} = 110 \Rightarrow$ Cumple, dado que ambas rutas llevan flujo y sus costos son iguales.
- Par BF (auto): $C_{h_{BF}} = 44 < C_{h_{BCDF}} = 110 \Rightarrow$ Cumple, dado que solo la ruta directa lleva flujo y, por ende, posee menor costo que la ruta $BCDF$.
- Par BF (bici): $43 = 43 \Rightarrow$ Cumple, dado que ambas rutas llevan flujo y sus costos son iguales.

Equilibrio de partición modal (par BF):

$$T_{BF}^{auto} = 79 \cdot \frac{e^{-44}}{e^{-43} + e^{-44}} = 21.2,$$
$$T_{BF}^{bici} = 79 \cdot \frac{e^{-43}}{e^{-43} + e^{-44}} = 57.8$$

Comparación con la asignación real:

$$T_{BF}^{auto} = 19 \qquad \text{(no coincide con el calculado al incio)}$$

Tabla resumen:

Modo	Costo	Distribución	Asignación
Auto	44.00	21.2	19.0
Bici	43.00	57.8	60.0

Optimalidad en la distribución:

- Para los pares AE, AF y BE, el costo mínimo corresponde directamente al costo general de la ruta, dado que existe un solo modo disponible.
- Para el par BF, el costo se calcula como la logsuma:

$$C_{BF} = -\frac{1}{\beta} \ln \left(e^{-\beta C_{BF}^{auto}} + e^{-\beta C_{BF}^{bici}} \right)$$

- Respecto a la distribución, se muestra el ejemplo para nodo A:

$$T_{AE} = 100 \cdot \frac{e^{-\beta(C_{AE} - A_E)}}{e^{-\beta(C_{AE} - A_E)} + e^{-\beta(C_{AF} - A_F)}} = 95.26 \qquad \text{(no coincide con el calculado al inicio de 99)}$$
$$T_{AF} = 100 - T_{AE} = 4.74 \qquad \text{(no coincide con el calculado al inicio de 1)}$$

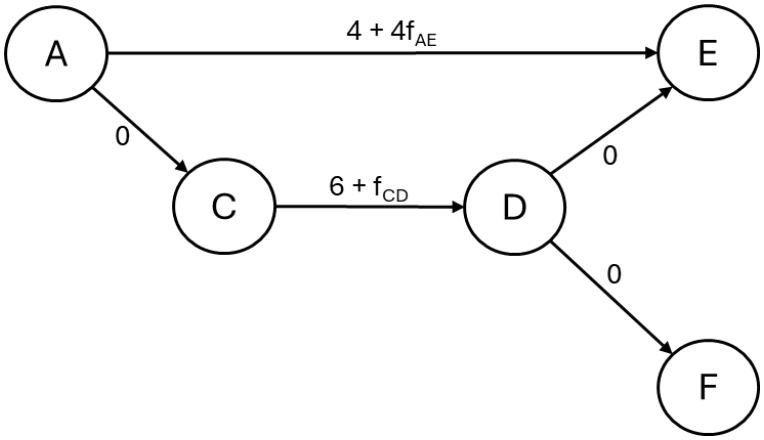
Tabla resumen:

Par	Costo mín./logsuma	Atractividad	Distribución	Asignación
T_{AE}	110.0	30	95.26	99.00
T_{AF}	110.0	0	4.74	1.00
T_{BE}	110.0	30	1.87	1.00
T_{BF}	42.7	0	78.13	79.00

Pregunta 2 (20 puntos)

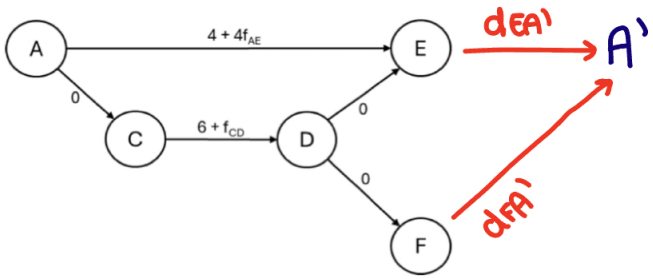
Considere ahora la siguiente red donde transitan solamente autos. El nodo A genera un flujo de 100 viajes/hora, que se distribuyen entre los nodos E y F, cada uno con atractividades 0 y 20 minutos, respectivamente, y con parámetro de escala $\beta = 0.1$. Considere además que los usuarios se asignan

a las rutas disponibles de acuerdo con las condiciones de equilibrio dadas por el primer principio de Wardrop.



(a) **(4 puntos)** Se le pide que dibuje este grafo como uno de asignación (tráfico) equivalente.
Solución:

[1 punto por nodo A', 3 puntos por arcos $d_{EA'}$ y $d_{FA'}$]



Donde los valores asociados se definen como:

$$d_{EA'} = 10 \cdot \ln(T_{AE}),$$
$$d_{FA'} = 10 \cdot \ln(T_{AF}) - 20,$$
$$T_{AA'} = 100.$$

(b) **(12 puntos)** Considere la siguiente asignación factible:

$$(h_{AE}; h_{ACDE}; h_{ACDF})^* = (17.2; 0; 82.8)$$

Se le pide indicar si esta asignación es un equilibrio de mercado utilizando **solamente el problema de tráfico equivalente** (es decir, como un problema únicamente de asignación). En su análisis, permita un error de aproximación de 0.2.

Solución:

[1 punto por calcular costos de los nuevos arcos (EA' y FA'); 3 puntos por determinar las tres rutas entre el par A-A'que hay que analizar; 2 puntos por el costo de cada ruta entre A-A'calculado; 2 puntos por conclusión.
Se asignan 0 puntos si no se utilizan arcos artificiales EA'y FA'.

Valores:

$$T_{AE} = 17.2, \qquad T_{AF} = 82.8,$$
$$x_{AE} = 17.2, \qquad x_{CD} = 88.8,$$

$$C_{AE} = 72.80, \qquad C_{ACDE} = C_{ACDF} = 88.80,$$
$$c_{EA'} = \frac{1}{\beta} ln(T_{AD}) = 28.45, \qquad c_{FA'} = \frac{1}{\beta} ln(T_{AF}) - 20 = 24.16,$$

Equilibrio de tráfico equivalente:
Tenemos que analizar tres rutas entre A y A': $h_{AEA'}$, $h_{ACDEA'}$ y $h_{ACDFA'}$:

$$C_{AEA'} = C_{AE} + c_{EA'} = 72.80 + 28.45 = 101.20,$$
$$C_{ACDEA'} = C_{ACDE} + c_{EA'} = 88.80 + 28.45 = 117.2,$$
$$C_{ACDFA'} = C_{ACDF} + c_{FA'} = 88.80 + 24.16 = 113$$

Conclusión: No hay equilibrio porque la primera y última ruta anterior llevan flujo y no tienen costo igual.

(c) **(4 puntos)** A usted le preguntan si, de acuerdo con el modelo planteado y con un cambio en la estructura de costos, podría llegar a un equilibrio de mercado tal que la demanda entre el par AE fuera exactamente igual a 0. Justifique su respuesta.

Solución:

[1 puntos por mencionar que no se puede y 3 puntos por justificación (es suficiente mencionar lo de las condiciones de optimalidad). Si es que no hay ninguna justificación, no se asignará puntaje.]
No es posible que la demanda del par AE sea exactamente igual a cero. Las condiciones de optimalidad corresponden a un modelo de distribución Logit (ya que es simplemente acotado). Esto implica que, en el equilibrio, la demanda de ningún par OD será exactamente igual a 0 (puede ser un número muy pequeño, pero no será igual a 0). Notar que el problema de optimización equivalente se indefinirá cuando una demanda sea igual a 0, ya que contiene el término $\ln(T_{ij})$.

*Note que las letras en el subíndice de las asignaciones por ruta entregadas representan los nodos por los que pasa esa ruta. Por ejemplo, la ruta ACDE (h_{ACDE}) representa una ruta entre el par A-E que pasa por C y D.