10 de noviembre de 2025

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO INGENIERIA DE TRANSPORTE Y LOGISTICA
ICT3103 ECONOMIA DE TRANSPORTE - 2º SEMESTRE 2025
INTERROGACION 2

Dispone de *una hora y cuarenta minutos* para responder la interrogación. En paréntesis figura el puntaje de cada pregunta. i) Sus respuestas tienen que ser autocontenidas, nada se dará por sobrentendido al corregir; ii) cuando dice explicar, debe proveer un argumento que justifique de manera adecuada su respuesta haciendo uso de los contenidos aprendidos en el curso; iii) en los desarrollos matemáticos, debe explicarse la notación utilizada; ídem con los gráficos. iv) Todas las preguntas deben ser respondidas de puño y letra.

1) Tarificación e inversión en infraestructura vial.

Considere este modelo: $BS(\{q_t\};k) = \int_0^q p(x)dx - qC(q;k) - \rho(k)$, donde q es demanda, p(q) es la función de demanda inversa, C(q, k) es la función de costo medio del usuario y ρ(k) es la función de costo de la inversión en infraestructura. Demuestre matemáticamente el teorema de Mohring-Harwitz (teorema de autofinanciamiento). Para ello obtenga las condiciones de primer orden, trabaje sobre ellas y aplique las condiciones del teorema. (14 % de la nota)

Respuesta:

Al derivar con respecto a q: $\frac{\partial BS}{\partial q} = p(q) - C(q;k) - q\frac{\partial C}{\partial q} = 0$ (I)

Al derivar con respecto a k: $\frac{\partial BS}{\partial k} = \frac{\partial BS}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial k} + -q\frac{\partial C}{\partial k} - \frac{\partial \rho}{\partial k} = 0$ (II)

En (I), dado que el costo del usuario es C, la tarifa vial es $T = q\frac{\partial C}{\partial q}$. En (II), $\frac{\partial BS}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial k} = 0$, dado que q es una variable de optimización. Por lo tanto, en (II) $-q\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{\partial \rho}{\partial k}$. La recaudación total es $Tq = q\frac{\partial C}{\partial q}q = -kq\frac{\partial C}{\partial K}$, por homogeneidad de grado cero de la función de costo medio ($\frac{\partial C}{\partial q}q + \frac{\partial C}{\partial K}k = 0$) . Haciendo uso de (II) $Tq = -kq\frac{\partial C}{\partial K} = k\frac{\partial \rho}{\partial k}$. Si existen economías de escala constantes en la construcción de vialidad, el costo marginal es igual al costo medio y, por lo tanto, la recaudación total es $Tq = kc_k$, donde c_k es el costo medio o unitario por unidad de infraestructura vial y k c_k es el costo total de la infraestructura vial. Así el teorema queda demostrado.

2) Tarificación en infraestructura vial - modelo congestión estática. Considere las funciones de demanda inversa de viajes para hora punta y hora fuera de punta $P_p(Q_p) = A_p - B_p Q_p$ y $P_f(Q_f) = A_f - B_f Q_f$, respectivamente (Q: demanda; p: punta; fp: fuera de punta). La función de costo medio de viaje en ambos períodos está dada por C = b Qi, (i: punta, fuera de punta). Suponga los siguientes valores $A_p = 800$, $B_p = 20$, $A_f = 400$, $B_f = 20$ y b = 10.

i) Determine numéricamente la demanda y la tarifa óptimas sociales para cada período del día. Para ello debe resolver el problema de maximización del bienestar social. (0,4)
ii) Calcule la demanda en cada período del día, suponiendo ausencia de tarificación vial y la implementación de un impuesto al combustible que hace que el costo de viaje (costo medio del usuario) pase a ser C = a + b Qi, donde a = 150, en ambos períodos. (El valor de *b* no cambia). (0,4)
iii) Explique si el impuesto a los combustibles funciona como un sustituto perfecto o imperfecto de la tarifa vial al comparar la solución en i) y ii). (0,2)

Sugerencia: en i) plantee las CPO, despeje el valor de Qi, obtenga su valor numérico y finalmente calcule la tarifa vial. En ii) resuelva a partir de la condición de equilibrio de usuario. (14 % de la nota)

Respuesta:

i) Para determinar el óptimo social, se debe maximizar la siguiente función:

$$Max_{Q_p,Q_f} BS = \int_0^{Q_p} (A_p - B_p\rho_p)d\rho_p - (bQ_p)Q_p + \int_0^{Q_f} (A_f - B_f\rho_f)d\rho_f - (bQ_f)Q_f$$

Obtenemos las condiciones de primer orden y resolvemos los valores de Qi.

$$\frac{\partial BS}{\partial Q_p} = (A_p - BQ_p) - (bQ_p) - bQ_p = 0 \Leftrightarrow Q_p = \frac{A_p}{B+2b} = 20$$
$$\frac{\partial BS}{\partial Q_f} = (A_f - BQ_f) - (bQ_f) - bQ_f = 0 \Leftrightarrow Q_f = \frac{A_f}{B+2b} = 10$$

Las demandas son independientes. Por lo tanto, cada condición de primer orden se resuelve por separado. Las tarifas respectivas están dadas por Ti = b Qi, (i: punta, fuera de punta). Así, en hora punta Tp = 20 * 10 = 200 y en fuera de punta Tf = 10 * 10 = 100.

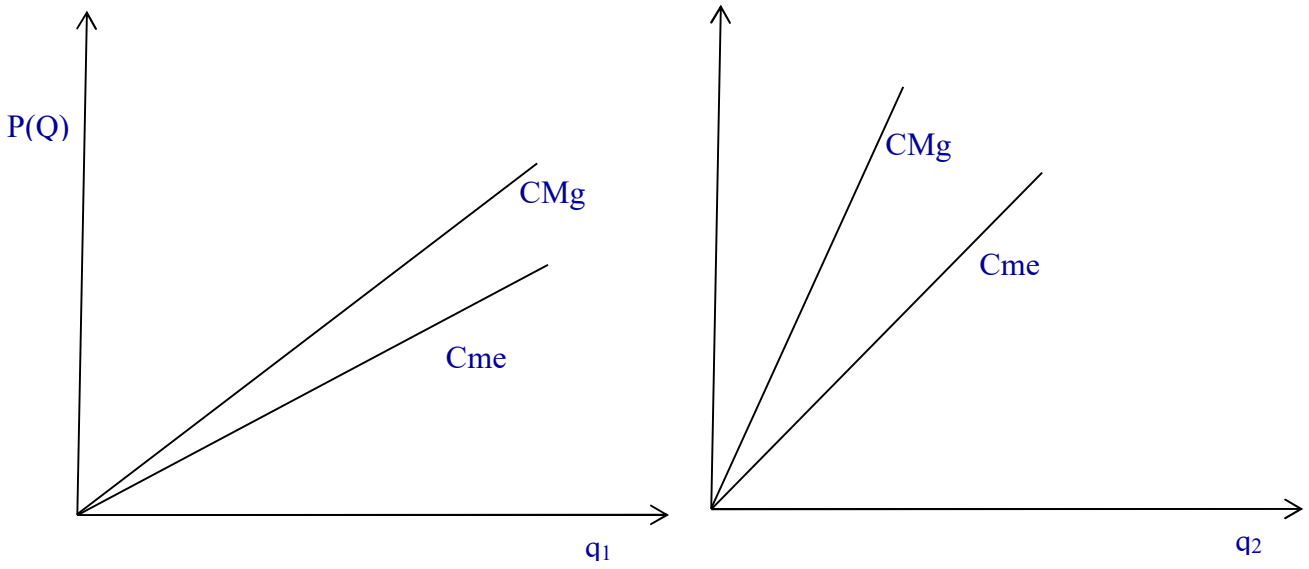
ii) $A_p - BQ_p = a + bQ_p \Leftrightarrow Q_p = \frac{A_p - a}{B+b} = \frac{650}{30} = 21{,}67$

$$A_f - BQ_f = a + bQ_f \Leftrightarrow Q_f = \frac{A_f - a}{B+b} = \frac{250}{30} = 8{,}33$$

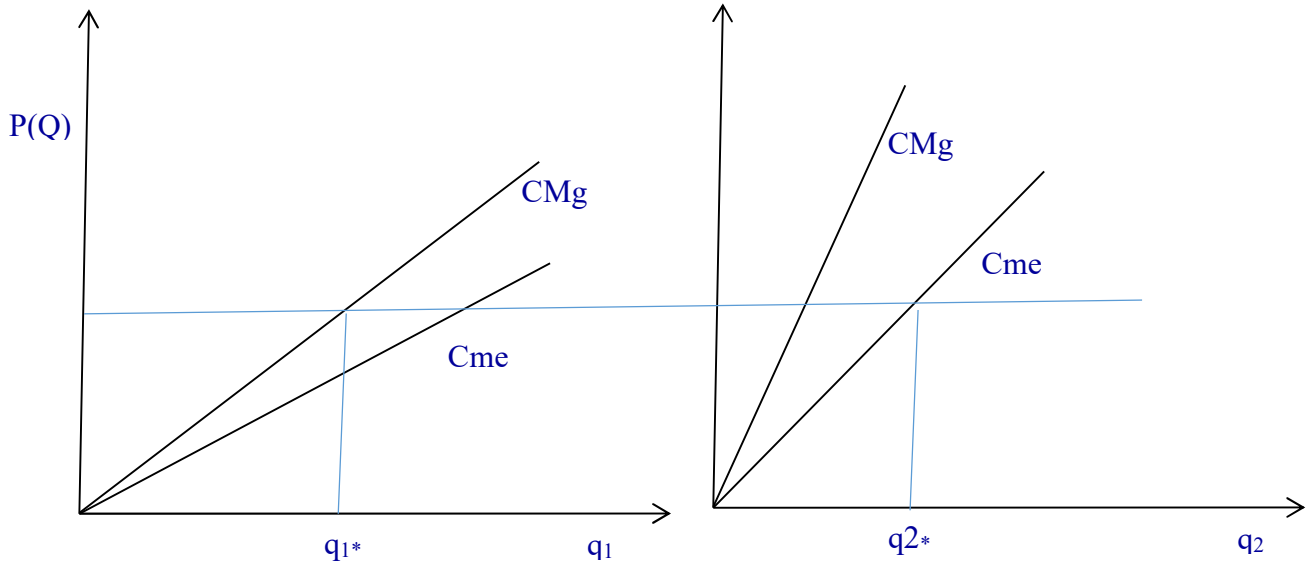
iii) Dado que el impuesto al combustible no puede diferenciar por hora del día, es un sustituto imperfecto de las tarifas viales por congestión variables según hora del día. En hora punta, el impuesto al combustible no alcanzar a cubrir el costo marginal externo de la congestión; por lo que se tiene exceso de demanda con relación al óptimo. En la hora punta, donde el impuesto

a los combustibles castiga en exceso a los usuarios, se tiene una disminución con respecto a la demanda óptima.

3) Tarificación e inversión en infraestructura vial. Suponga i) un par origen destino, ii) dos rutas para viajar, iii) demanda perfectamente elástica, tal que q1 + q2 = Q y iv) la ruta 1 es tarificada y la ruta 2 es de circulación gratuita. En el gráfico siguiente, dibuje el equilibrio de usuario y explíquelo con un texto. El ejercicio estará bien resuelto solo si los dos gráficos son consistentes entre sí y si estos están bien explicados. (8% de la nota)



Respuesta:



Como la demanda es perfectamente elástica, la curva de demanda inversa tiene pendiente igual a cero. En el primer gráfico, la demanda es q1* donde la curva de demanda intercepta la curva de costo marginal. En el segundo gráfico, la demanda es q2*, donde la curva de demanda intersecta la curva de costo medio. Para que la respuesta este bien, la curva de demanda debe tener la misma altura en ambos gráficos, lo que significa que el costo por circular en ambas rutas es el mismo, a fin de cumplir el equilibrio de usuario.

4) Tarificación en infraestructura vial - modelo cuello de botella. En el modelo de cuello de botella, suponga que alfa = 3.000 $/h (valor del tiempo de viaje); beta = 500$/h (costo por de arribo temprano) y gamma = 3.500$/h (costo por arribo tardío). Suponga también que N/ ω = 2h (h: hora). Considere ausencia de tarificación vial. i) Obtenga la hora de inicio y la hora de fin del período punta. (0.17) ii) Determine la hora en que inicia su viaje quien llega justo a la hora deseada t*. (0.17) iii) Grafique la solución de equilibrio que muestre cómo se arma la cola de vehículos, los tiempos de espera en cola y el tiempo en que se disipa la cola, en función del tiempo. Este gráfico debe incluir en el eje de las abscisas el instante en que se inicia la cola, el instante en que parte quien arriba a la hora, la hora deseada de llegada y el instante en que se disipa la cola. Cada uno de estos cuatro instantes tiene que estar con su expresión algebraica respectiva. (0.49) iv) Suponga que existe tarificación vial, determine cuál es la máxima tarifa que se cobrará durante la hora peak de congestión. (0.17) (12% de la nota)

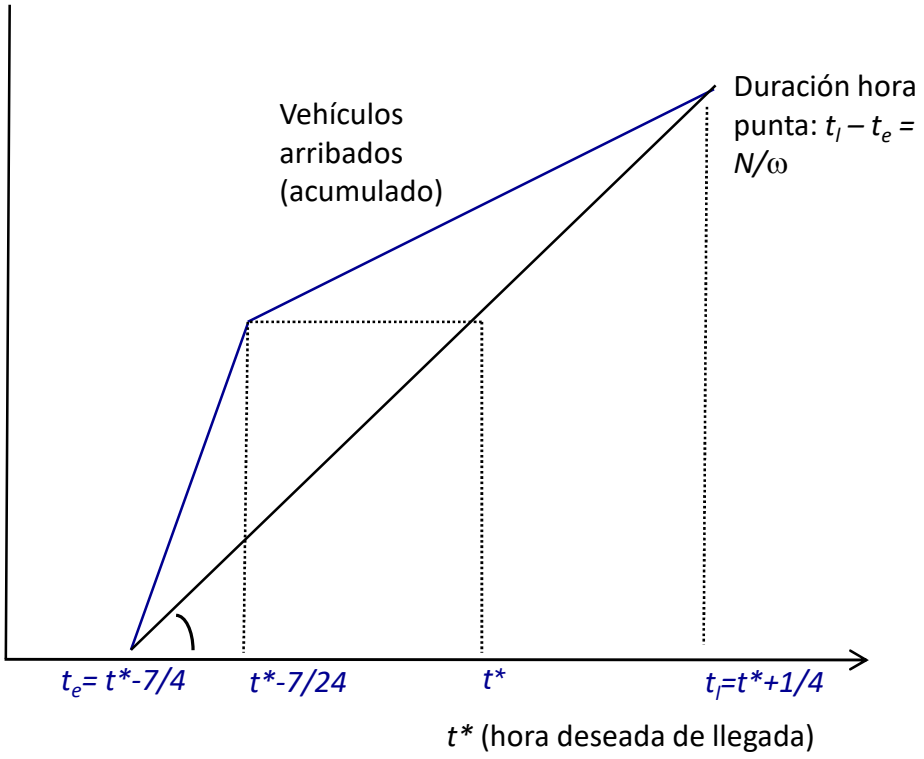
Fórmulas claves:
$t_e = t^* - \gamma/(\beta + \gamma)$ N/ ω, hora de inicio de la cola
$t_l = t^* + \beta/(\beta + \gamma)$ N/ ω , hora en que se disipa la cola
$T^v = \beta / \alpha\ (t^{arribo} - t_e)$, tiempo de viaje para quien llega temprano
$T^v = \gamma / \alpha\ (t_l - t^{arribo})$, tiempo de viaje para quien llega tarde
$\tau(t_{arribo}) = \beta\ (t_{arribo} - t_e)$, tarifa para quienes arriban temprano
$\tau(t_{arribo}) = \gamma\ (t_l - t_{arribo})$, tarifa para quienes arriban tarde

Respuesta:
i) La cola se comienza a armar en el instante:
$t_e = t^* - \gamma/(\beta + \gamma)$ N/ ω = $t^* - 3.500 / (3.500 + 500)\ 2 = t^* - 7/4$.

La cola se disipa en $t_l = t^* + \beta/(\beta + \gamma)$ N/ ω = t* + 500 / (3.500 + 500) 2 = $t^* + 1/4$.

ii) $T^v = 1/6\ (t^* - t^* + 7/4) = 7/24$ h. Con la ecuación que corresponde a quienes llegan tarde, se obtiene el mismo resultado: $T^v = 7/6$ (t* + 1/4 - t*) = 7/24 h. (Basta con hacerlo con una de las dos fórmulas.)

iii) Gráfico:



iv) Este valor está dado por la tarifa que pagan quienes arriba a la hora. Aplicando la fórmula para arribos tempranos $\tau(t_{arribo}) = \beta\ (t_{arribo} - t_e) = 500 * 7/4 = \$875$. Aplicando la fórmula para arribos tardías la tarifa es $\tau(t_{arribo}) = \gamma\ (t_l - t_{arribo}) = 3.500 * 1/4 = \$875$. De las dos maneras se tiene que llegar al mismo resultado. Para considerar bien la respuesta basta que lo hagan de una u otra manera.

5) Transporte público y subsidios. i) Ud. está preparando su oferta para la licitación del servicio, que consiste en expresar el subsidio por pasajero transportado. Estos son los parámetros con los que debe preparar su oferta. La demanda es de 960 pasajeros a la hora, uniformemente distribuida a lo largo del recorrido y cada pasajero recorre la mitad del recorrido –mismo modelo que el visto en clase. El intervalo exigido es un servicio de bus cada 5 minutos y el tiempo de ciclo es de 3 horas (los tiempos de ascenso y descenso son despreciables). Su función de costo por hora de un bus es ($C_0 + C_1$ K), donde K es capacidad del bus, C_0 = \$10.000 y C_1 = \$400. El precio del pasaje en bus a cobrar es igual a \$600. (Los valores de C0 y C1 incluyen el costo de oportunidad del capital más su costo del tiempo por gerenciar la operación, por lo que con estos dos valores tiene toda la información de costos necesaria para hacer su oferta). Con esta información, suponiendo que los buses viajan a capacidad y haciendo uso de las fórmulas para calcular la demanda y oferta de frecuencia, calcule la capacidad óptima y el subsidio requerido para cumplir con los parámetros solicitados y minimizar costos. (10% de la nota)

Respuesta:
Se exige una frecuencia de 12 servicios a la hora (un servicio cada cinco minutos). Para cumplir con la frecuencia, se requiere una capacidad de los buses igual a
K = ½ Y / f = 960 / (2 * 12) = 40 pax/bus.

Dado que los buses viajan a capacidad, se requieren (frecuencia * tiempo de ciclo = buses) **12 * 3 = 36 buses.**

Con ello el costo por hora por bus es **10.000 + 400 * 40 = \$26.000**.

El costo total por hora es **26.000 * 36 = \$936.000**.

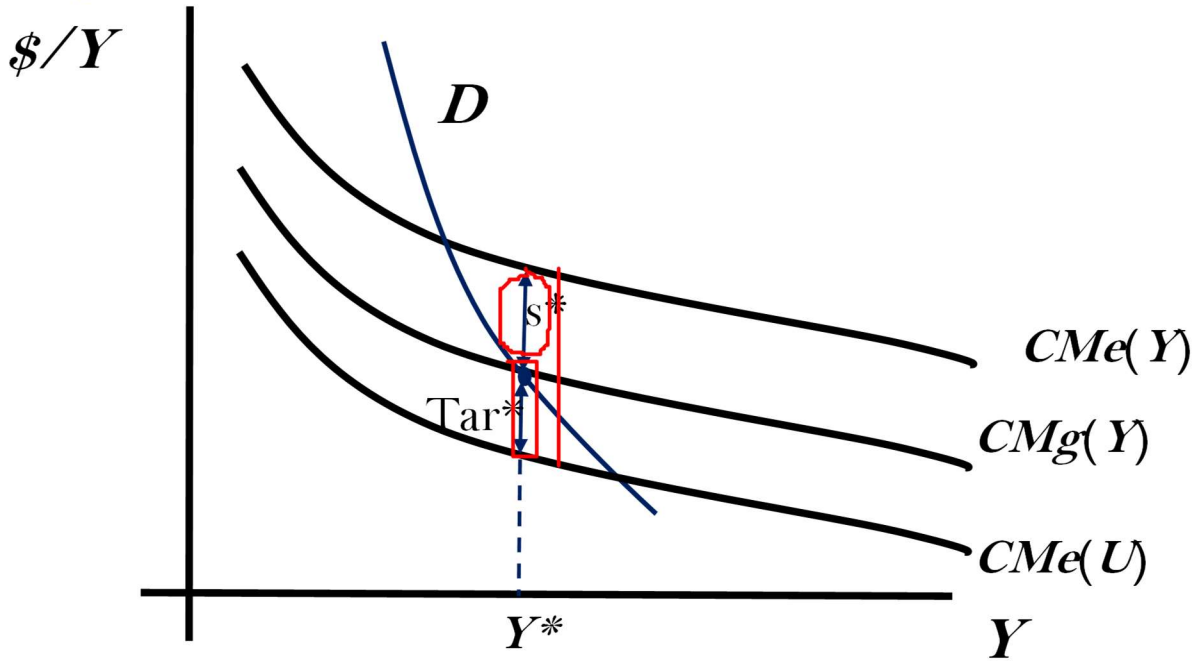
Por hora se recaudan **Y * tarifa = 960 * 600 = 576.000**.

Para cubrir el costo la tarifa técnica debe **\$975 (= 936.000 / 960)**.

Por lo tanto, el subsidio requerido es de **\$375 (= 975 – 600)** por pasajero.

6) Transporte público y subsidios. Considere el modelo básico visto en clase. i) Grafique la curva de costo medio por pasajero, la curva de costo marginal por pasajero y la curva de costo medio del usuario. Grafique también la curva de demanda. ii) En base a las tres curvas de costo y a la curva de demanda, explique cómo se determinan el subsidio óptimo y la tarifa óptima. Dibújelos en el gráfico, señalando el segmento que entrega el valor de la tarifa y el segmento que entrega el valor del subsidio por pasajero. Sea muy claro con su gráfico para tener el ejercicio bien. (12% de la nota)

Respuesta:



Cme(Y): costo medio por pasajero. Cmg(Y): costo marginal por pasajero. Cme(U): costo medio del usuario. La demanda óptima social es donde la curva de demanda corta la curva de costo marginal; es decir, Y*..

El segmento Tar = Cmg(Y) – Cme(U), para la demanda Y* entrega el valor de la tarifa y el subsidio (S) está dado por la diferencia vertical S = Cme(y) – Cmg(y) para el valor de Y*.

7) Transporte público y desregulación. i) Explique por qué un conductor de micro tiene poder de mercado, en un mercado de buses desregulado. ii) Explique en qué condiciones este poder de mercado lleva a tarifas de monopolio. iii) Explique por qué a pesar de la existencia de tarifas de monopolio, los ingresos extraordinarios se reducen a cero. (12% de la nota)

Respuesta: i) Si el servicio de bus se desregula y los micreros tiene libertad para fijar la tarifa, podrán ejercer poder de mercado. Al arribar a un paradero, el conductor puede subir el precio y aquellos pasajeros que tengan un alto valor de su tiempo de espera, preferirán abordar la micro antes que permanecer en el paradero esperando a una próxima micro de menor costo. ii) Si este comportamiento es adoptado por todos los micreros, no habrá una próxima micro de menor costo, la tarifa que cobrarán los micreros serán altas y los precios subirán hasta alcanzar el máximo precio posible, dado por el precio de monopolio, es decir el precio que maximiza la ganancia empresarial. iii) Ello genera ganancias extraordinarias e induce a otros agentes a entrar a la actividad. Así, la tasa de ocupación por micro disminuye, los costos por pasajero transportado aumentan, los márgenes de ganancia caen a cero y se acabará el incentivo a que nuevos operadores entren al mercado. Además, ello generará mayores externalidades negativas (contaminación, ruido, riesgo de accidentes).

8) Transporte público y desregulación. i) Plantee un modelo que permita determinar la probabilidad de que un pasajero deje pasar una micro de alto costo para esperar una próxima micro de bajo costo. Considere estas variables:
te: tiempo de espera promedio. Los intervalos entre micros distribuyen de manera exponencial.
P_w: valor subjetivo del tiempo de espera; $P_w > 0$
p_a: tarifa alta; p_b: tarifa baja
Pr_b: probabilidad de que arribe un bus de tarifa baja después de que haya arribado un bus de tarifa alta. (0.7)
ii) Suponga que i) la diferencia de precios entre p_a y p_b es \$500, ii) el tiempo de espera promedio es 5 minutos y iii) la probabilidad de que la próxima micro sea de precio bajo es 0,25. Determine el rango del valor del tiempo (en \$/min) de las personas que preferirán esperar la próxima micro antes que abordar la micro de precio alto. (0.3) (10% de la nota)

Respuesta:
i) Si llega al paradero una micro de tarifa alta, conviene dejarla pasar si se da esta relación entre las siguientes variables $p_a \geq P_w\ te + p_b\ Pr_b + p_a\ (1 - Pr_b) \Leftrightarrow P_w \leq (p_a - p_b)\ Pr_b / te$.
ii) $P_w \leq (p_a - p_b)\ Pr_b / te = 500 * 0{,}25 / 5 = 25$ \$ / min. Aquellas personas cuyo valor del tiempo de espera es inferior a 25 \$/min, dejarán pasar la micro.

9) Provisión de infraestructura vial y su financiamiento en Chile

i) a) Explique cuáles son las dos agencias gubernamentales más relevantes a nivel nacional en la provisión y mantenimiento de la infraestructura vial. Debe quedar claro el ámbito de acción de cada una de ellas. b) Explique además si estas agencias se financian a partir de cobros a usuarios o no y cómo ello afecta sus decisiones de inversión.

ii) Explique la diferencia entre el impuesto al combustible, el impuesto al NOX a los vehículos y el permiso de circulación. Explique también cómo afectan estos tres pagos el uso del vehículo. (8% de la nota)

Respuesta: i) El Ministerio de Vivienda y Urbanismo (MINVU) se encarga de la infraestructura vial a nivel urbano. La dirección de Vialidad, perteneciente al Ministerio de Obras Públicas (MOP), se encarga de la infraestructura vial a nivel interurbano. Tanto el MINVU como el MOP tienen un presupuesto asignado por Ley Nacional. En otras palabras, estas agencias no generan sus ingresos a partir de cobros a usuarios. Por lo tanto, sus criterios para invertir y mantener la infraestructura vial no están determinados en función de ingresos por ventas de servicios a usuarios, sino que por criterios administrativos o de evaluación social de proyectos. De esta manera, al no haber un vínculo directo entre el origen de los fondos y el destino de los mismos, se dice que no existe disciplina de mercado.

ii) El impuesto a los combustibles se paga en función directa del uso del auto, a más km circulados, mayor consumo de combustible, por lo tanto, mayor pago de impuesto al combustible. (Por otro lado, a mayor congestión, mayor consumo de combustible. Así, el impuesto al combustible se asemeja a una tarifa vial. Si esto en paréntesis no lo dicen, no importa). El impuesto al NOX se paga al comprar un vehículo, por lo tanto, no afecta el uso del vehículo sino la decisión de compra. El permiso de circulación se paga todos los años. Una vez más, este cobro es independiente del uso de vehículo. Si no se lo paga, no se puede conducir el vehículo.

Sexta Lista de Ejercicios – ICT 3103
Congestión Dinámica

Ejercicio 1 Modelo de cuello de botella

En el modelo de cuello de botella, obtenga las ecuaciones para determinar:

i) El inicio de la hora punta y el fin de la hora punta.
ii) El costo marginal de un usuario adicional si no hay tarificación
iii) La tarifa dinámica
iv) El costo marginal de un usuario adicional con tarificación

Respuesta 1:

i) El inicio de la hora punta y el fin de la hora punta se consigue al considerar que el costo en equilibrio es igual a todos y que el tiempo de cogestión será determinado por la cantidad de personas que viajan N y la tasa del cuello de botella ω

$$\beta(t^* - t_e) = \gamma(t_l - t^*)$$
$$(t_l - t_e) = \frac{N}{\omega}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$

$$t_l = t^* + \frac{\beta}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$

ii) Si no hay tarificación, el costo que percibe cada individuo será

$$\beta(t^* - t_e) = \frac{\beta\gamma}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$

Luego,

$$C^{eu} = \beta(t^* - t_e) = \frac{\beta\gamma}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$
$$C_{mg} = C^{eu} + N\frac{\partial C^{eu}}{\partial N} = 2C^{eu}$$

iii) La tarifa dinámica será cobrada de forma a sustituir el costo de congestión,

Si el individuo llega a la hora t, antes de la hora deseada t^* pagará la tarifa τ que será definida por,

$$\tau(t) = \beta(t - t_e)$$

Si t es posterior a t^* pagará la tarifa τ que será definida por,

$$\tau(t) = \gamma(t_l - t)$$

iv) Con tarificación el costo medio del usuario será igual a la mitad del costo medio anterior,

$$Cme = \frac{\beta\gamma}{2(\gamma + \beta)}\frac{N}{\omega}$$

Y el costo marginal,

$$Cmg = \frac{\beta\gamma}{(\gamma + \beta)}\frac{N}{\omega}$$

Ejercicio 2 Modelo de cuello de botella

En el modelo de cuello de botella, qué ocurre si el costo de llegar tarde tiende a infinito:

i) Calcule el inicio de la hora punta y el fin de la hora punta.
ii) Haga el gráfico donde muestre como se arma la cola de espera en función el tiempo.
iii) Explique en palabras los resultados obtenidos

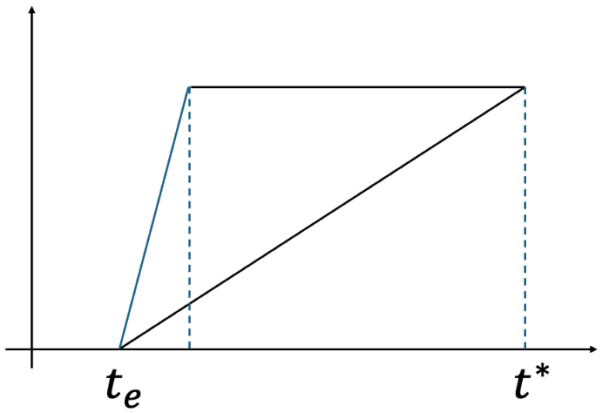
Respuesta 2:

i) Si $\gamma \to \infty$ entonces,

$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^* - \frac{N}{\omega}$$

$$t_l = t^* + \frac{\beta}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^*$$

ii) El gráfico debe mostrar que nadie llega después de la hora deseada t^* y que la cola crece hasta que el tiempo máximo en la cola sea justo el tiempo restante para t^*.



iii) Si el costo de llegar tarde tiende a infinito nadie querrá llegar después de la hora deseada. El que llega a la hora deseada percibe el mayor costo de congestión. El horario de inicio de la cola solo depende de cuantas personas viajan y la tasa del cuello de botella, ya que no existe más un *trade off* entre llegar tarde o temprano, todos llegan temprano.

Ejercicio 3 Modelo de cuello de botella

En el modelo de cuello de botella, qué ocurre si $\alpha = \beta = \gamma$.

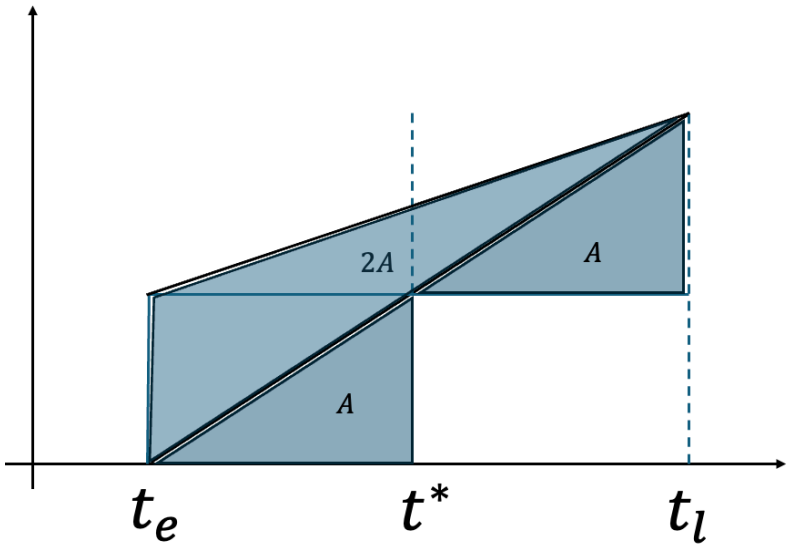
i) Calcule el inicio de la hora punta y el fin de la hora punta.
ii) Haga el gráfico donde muestre como se arma la cola de espera en función el tiempo.
iii) Explique en palabras los resultados obtenidos.
iv) ¿Qué caso cree Ud. que es más probable en la vida real: este o el visto en el ejercicio anterior?

Respuesta 3:

i)

$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^* - \frac{1}{2}\frac{N}{\omega}$$
$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^* + \frac{1}{2}\frac{N}{\omega}$$

ii) El gráfico debe demostrar que las áreas de los triángulos son iguales.



iii) Mitad de las personas llegará adelantado y la mitad atrasado, no hay diferencia entre el tiempo de llegar adelantado, atrasado o estar en la cola.
iv) El ejemplo anterior con mayor penalización para llegar atrasado.

Ejercicio 4 Diferencias entre modelos

Explique qué diferencia, en cuanto a la modelación de la congestión, a los modelos estático y cuello de botella.

Respuesta 4:

Mencionar las diferencias de los supuestos de modelación (congestión dinámica asumen demanda inelástica), la tarifa (estática versus dinámica) y la forma con que reducen la congestión (reducción de usuarios viajando versus reordenamiento de llegadas).

Ejercicio 5

Considere la función de demanda inversa P = 18 – 0,01 Q. Suponga que el costo por unidad de infraestructura es $50. Considere las preferencias alfa = beta = gamma = 1.

i) Determine la demanda y provisión de infraestructura óptima social. Calcule la recaudación y el costo total de todos los usuarios.

ii) En base a los resultados obtenidos en el punto i) para la demanda y la provisión de infraestructura, determine el equilibrio de usuario sin tarificación vial.

Respuesta 5:

i) Para calcular la demanda y la inversión óptimas se debe plantear la función de beneficio social

$$BS = \int_0^Q (18 - 0{,}01x)dx \; - NC^u - C_\omega \omega$$

El costo del usuario en tarificación vial es dado por la expresión:

$$C^u = \frac{\gamma\beta}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega} = \frac{N}{2\omega}$$

Las condiciones de primer orden serán:

$$\frac{\partial Bs}{\partial N} = \; (18 - 0{,}01N) - \frac{N}{4\omega} - \frac{N}{4\omega} = 0 \; \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{N}{\omega} + 0{,}01N = 18$$

$$\frac{\partial Bs}{\partial \omega} = -N\left(-\frac{N}{4\omega^2}\right) - 50 = 0 \Rightarrow \left(\frac{N}{\omega}\right)^2 = 200 \Rightarrow \frac{N}{\omega} = \sqrt{200}$$

Resolviendo,

$$0{,}5\sqrt{200} + 0{,}01N = 18 \Rightarrow N = 1092$$
$$\omega = 77{,}21$$

El costo total del usuario es $P(1092) = 18 - 0{,}01 \cdot 1092 = 7{,}08 = \frac{N}{2\omega}$, la mitad de este costo (costo percibido o costo medio) es tiempo por llegar fuera de término y la otra mitad es la tarifa vial.

La recaudación total *R* será igual a N por tarifa. La tarifa es 1/2 N/ω = $3,535, la mitad del costo del usuario. Así *R* está dada por

$$R = \frac{1}{2}\frac{N}{\omega}N = 3860$$

El costo total de la infraestructura es 50 ω = 3864. Se cumple el teorema de Mohring-Harwitz.

ii) Si no hay tarificación vial, para una demanda de 1092 vehículos y una infraestructura igual a 77,3 unidades de atención por unidad de tiempo, la hora de inicio y hora de término se mantienen, pero habrá colas en el servidor. Dado que alfa = beta = gamma = 1, estas colas harán perder a los usuarios una cantidad de tiempo cuyo valor es igual al costo del tiempo por llegada tarde. En otras palabras, al eliminar la tarificación vial, el tiempo en cola total es igual al tiempo por llegada a destiempo total. El gráfico correspondiente es similar al del ejercicio 3.

Quinta Lista de Ejercicios – ICT 3103
Tarificación Vial y Tarifa de Ramsey

Ejercicio 1 Tarifa Ramsey

Deduzca la tarifa Ramsey a cobrar a los automovilistas cuando existen economías de escala crecientes en la construcción de vialidad. Deduzca también la regla de inversión óptima en vialidad.

Respuesta 1: Ver diapositiva clase 2_1_1

Ejercicio 2 Tarifa Ramsey

Explique conceptualmente que se entiende por Tarifa Ramsey.

Respuesta 2:

La Tarifa de Ramsey es una tarifa de segundo mejor, calculada para minimizar la pérdida de bienestar social cuando restringe a que la recaudación percibida se igual al costo de inversión den infraestructura. A demandas inelásticas, la cantidad de usuarios que viajan con la tarifa de Ramsey será inferior a la cantidad de usuarios que viajan en el óptimo social (sin restricción de igualdad de la recaudación con el costo de inversión en infraestructura), pero la tarifa será mayor, permitiendo que se cumpla el autofinanciamiento.

Ejercicio 3

Considere una empresa de transporte aéreo de bandera nacional que ofrece un conjunto de servicios x (x es un vector; se supone que la demanda de cada servicio solo depende de su propio precio). Suponga que el Ministerio de Hacienda le exige a esta empresa generar un superávit de recaudación igual a S. La función de Bienestar Social está dada por BS(x) = B(x) – C(x), donde B(x) es el beneficio al consumidor y C(x) el costo total de producción. La recaudación (R = px x) neta de costos debe ser igual a S. Suponga que todas las elasticidades cruzadas son iguales a cero.

i) Demuestre que la desviación proporcional del precio de cada servicio con respecto a su costo marginal está dada por esta ecuación:

$$\left(\frac{p_{x_i} - Cmg(x_i)}{p_{x_i}}\right) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}}\right)$$

ii) Demuestre que si el valor del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de superávit tiende hacia infinito, entonces, el precio a cobrar corresponde a la regla de precio de monopolio.

Respuesta 3:

i) La función de bienestar estará restringida al superávit, o sea que la recaudación debe superar los costos de producción. En ese caso, se puede escribir el Lagrangeano del problema de maximización del bienestar social en,

$$\mathcal{L} = B(x) - C(x) + \lambda(p_x x - C(x) - S)$$

Por la condición de primer orden con la demanda del servicio i, x_i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = p_{x_i} - Cmg(x_i) + \lambda\left(p_{x_i}\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}} + 1\right) - Cmg(x_i)\right) = 0$$

Ordenando los términos y solucionando algébricamente, se obtiene el resultado de la expresión,

$$\left(\frac{p_{x_i} - Cmg(x_i)}{p_{x_i}}\right) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}}\right)$$

En otras palabas, la divergencia entre el precio y el costo marginal es mayor cuanto menor es la elasticidad precio de cada bien (o más inelástica es la demanda del bien). El valor λ representa el costo marginal social por cada peso

adicional de recaudación que se le exige a la empresa. Si λ tiende a cero, el precio de cada servicio será apenas superior a su costo marginal. Si λ tiende a infinito, se llega a los precios de monopolio).

Esta fórmula aplica también en el caso en que la producción de los servicios esté sujeta a economías de escala creciente y la empresa de transporte deba autofinanciarse (en este caso S = 0). Si se tarifica a costo marginal, se genera un déficit de recaudación. Por lo tanto, los precios deben desviarse de su costo marginal según la ecuación descrita a los efectos de lograr una recaudación que cubra los costos de operación y capital de la empresa tal que el bienestar social disminuya lo menos posible.

Esta regla para determinar precios óptimos que divergen de los costos marginales recibe el nombre de precios Ramsey o precios segundo mejor.

iii) Algébricamente se puede obtener que si λ tiende a infinito, se obtiene la tarifa de monopolio

$$\left(\frac{p_{x_i} - Cmg(x_i)}{p_{x_i}}\right) = -\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}}\right)$$

Ejercicio 4

Deduzca una expresión para determinar el beneficio marginal de expandir la infraestructura vial en caso de que no exista tarificación vial. Una vez deducida esta expresión, determine el beneficio marginal de expandir la vialidad si la elasticidad de la demanda con respecto a la provisión de infraestructura vial es 1 (uno). En otras palabras, la demanda inducida es tal que la relación demanda-capacidad se mantiene constante ante un aumento de la capacidad.

Respuesta 4: Ver diapositiva clase 2_1_1 (39 a 42)

Ejercicio 5

Considere la función de demanda inversa p(q) para un viaje entre un par OD. Suponga la existencia de dos rutas que permiten realizar el viaje, cada una de ellas con costo medio percibido ci(qi, ki) (i = 1, 2) (q = q1 + q2; q: demanda total, qi: demanda ruta i; ki: capacidad vial ruta i). El costo de la infraestructura para cada ruta está dado por la función ρ(ki) (i = 1, 2).

Plantee el problema de máximo bienestar social.

a) Derive la condición de primer orden con respecto a qi (i = 1, 2).

b) Deduzca la ecuación que establece la tarifa vial igual al costo marginal social de congestión.

c) Derive la condición de primer orden con respecto a ki (i = 1, 2) y determine la regla de inversión óptima.

Suponga que solo se puede tarificar la Ruta 1. Ello implica colocar la siguiente restricción en el problema de maximización de bienestar social , cuyo significado es que el costo de viajar ha de ser igual al costo medio percibido de viaje en la Ruta 2.

a) Determine la tarifa óptima segunda mejor a cobrar en la Ruta 1. Para ello derive la función de bienestar social con restricción con respecto a q1 y q2, despeje el valor del multiplicador de Lagrange en la condición de primer orden correspondiente a q2 y reemplace en la condición de primer orden correspondiente a q1.

b) Demuestre que si la demanda es infinitamente elástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es la que corresponde a la solución primera mejor.

c) Demuestre que si la demanda es infinitamente inelástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es igual a la diferencia de la externalidad de congestión entre la Ruta 1 y la Ruta 2. Explique en qué caso esta tarifa sería un subsidio.

d) por último deduzca la regla de inversión óptima para cada ruta.

Respuesta 5:

El problema de bienestar social está dado por:

$$BS = \int_o^q p(x)dx \; - \; q_1 C_1(q_1, k_1) - q_2 C_2(q_2, k_2) - \rho(k_1) - \rho(k_2)$$

a) Las condiciones de primer orden son, siendo el último término de cada ecuación la tarifa cobrada en cada ruta que está asociada al óptimo del bienestar social

$$\frac{\partial BS}{\partial q_1} = \; p(q) - \; C_1(q_1, k_1) - q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial BS}{\partial q_2} = p(q) - C_2(q_2, k_2) - q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} = 0$$

b) Deduzca la ecuación que establece la tarifa vial igual al costo marginal social de congestión.

$$T_1 = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1}$$
$$T_2 = q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}$$

c) Obteniendo la condición de primer orden en relación a k_1 y k_2, se obtiene las reglas de inversión óptima. Se invierte en capacidad en la vía 1, hasta el que costo marginal por invertir en capacidad se iguale al beneficio marginal por descongestión en la vía 1. Análogamente para la vía 2.

$$\frac{\partial BS}{\partial k_1} = -q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial k_1} - \frac{\partial \rho}{\partial k_1} = 0$$
$$\frac{\partial BS}{\partial k_2} = -q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial k_2} - \frac{\partial \rho}{\partial k_2} = 0$$

Para el segundo caso, cuando solo se puede tarificar la vía 1, a la función de beneficio social agregamos la restricción de que el costo debe ser igual al costo medio de la vía 2 (ya que esta no recibirá tarificación).

$$BS = \int_o^q p(x)dx - q_1 C_1(q_1, k_1) - q_2 C_2(q_2, k_2) - \rho(k_1) - \rho(k_2) + \lambda(p(q) - C_2(q_2, k_2))$$

Obteniendo las condiciones de primer orden, tenemos que:

$$\frac{\partial BS}{\partial q_1} = p(q) - C_1(q_1, k_1) - q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial p}{\partial q_1} = 0$$
$$\frac{\partial BS}{\partial q_2} = p(q) - C_2(q_2, k_2) - q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \right) = 0$$

Recordando que la tarifa cobrada en 1, $T_1 = p(q) - C_1(q_1, k_1)$ que es son los primeros términos de la primera condición.

$$T_1 = p(q) - C_1(q_1, k_1) = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial p}{\partial q_1}$$

Desde la segunda condición de primer orden, y sabiendo que la ruta 2 no tiene tarificación por lo que $p(q) - C_2(q_2, k_2) = 0$, obtenemos que:

$$\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \right) = q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}$$

$$\lambda = \frac{q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}}{\left(\frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \right)}$$

Entonces,

$$T_1 = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} + \frac{q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \frac{\partial p}{\partial q_1}}{\left(\frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} - \frac{\partial p}{\partial q_2} \right)}$$

Podemos escribir que:

$$T_1 = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \frac{1}{\left(\frac{\frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}}{\frac{\partial p}{\partial q}} - 1 \right)}$$

La tarifa cuando solo una ruta es tarificada será la tarifa del óptimo social para esta ruta más un descuento que depende de la tarifa de primer mejor para la ruta 2, por un factor asociado a cuánto la ruta 2 está congestionada y la elasticidad de la demanda.

b) Si la tarifa es infinitamente elástica, entonces $\frac{\partial p}{\partial q} \to 0$, luego el segundo término tiende a 0 y la tarifa cobrada es la de primer mejor
c) Si la tarifa es infinitamente inelástica, entonces $\frac{\partial p}{\partial q} \to \infty$, luego el segundo término tiende a -1 y la tarifa cobrada es la diferencia de las tarifas de primer mejor de la ruta 1 y la ruta 2.
d) Para deducir la regla de inversión, obtenemos las condiciones de primer orden en relación a la capacidad,

$$\frac{\partial BS}{\partial k_1} = -q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial k_1} - \frac{\partial \rho}{\partial k_1} = 0$$

$$\frac{\partial BS}{\partial k_2} = -q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial k_2} - \frac{\partial \rho}{\partial k_2} - \lambda \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial k_2} = 0$$

Ejercicio 6 Viajes par OD

Suponga que se está considerando construir un trayecto de más de 1.000km de largo. Dado que el Estado no cuenta con recursos para financiar la construcción, el asesor del Ministro de Transporte le recomienda a este dividir la ruta en tres bloques y que cada uno de ellos sea construido y operado por una empresa maximizadora de beneficios. Suponga además que no hay forma legal factible que permita regular los precios. ¿Es esta recomendación del asesor una buena idea?

Respuesta 6:

No es una buena idea, si no hay una forma que permita regular los precios, los operadores establecerán una tarifa que maximiza su beneficio (recaudación menos costos) que será superior a la tarifa en base al óptimo social.

Ejercicio 7 Ecuación Monopolista

Determine la ecuación con la que el monopolista establece la tarifa vial. Explique el resultado.

Respuesta 7: ver apuntes de clase 2_1_1

Ejercicio 8 Monopolio

Considere el transporte entre un par OD. i) Explique qué ocurre cuando existe una sola ruta operada por una empresa maximizadora de beneficios. ii) Explique el beneficio de incorporar nuevos operadores que puedan gestionar nuevas rutas.

Respuesta 8:

En i) existe un monopolio, el operador tiene total poder de mercado, y la tarifa será aquella que maximiza los beneficios del operador será mayor a la tarifa óptima social. Al agregar nuevos operadores y rutas, se reduce el poder de mercado de cada uno de ellos y en competencia las tarifas se acercarán a la tarifa óptima social a medida que crece la cantidad de operadores.

Ejercicio 9 Tarificación por Infraestructura Vial

Considere la función de demanda inversa lineal de viajes entre un par OD: p(q) =A - B q. Se puede viajar por dos rutas, tal que q = q1 + q2. Las funciones de costo medio percibido para la Ruta 1 y la Ruta 2 son respectivamente CMe1 = a1 + b1 q1^2 y CMe2 = a2 + b2 q2^2. Solo se puede tarificar la Ruta 1; la Ruta 2 no cobra tarifa.

i) Obtenga la tarifa segunda mejor para la Ruta 1, bajo las condiciones del enunciado. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente.
ii) Obtenga la tarifa que maximiza el ingreso del operador de la Ruta 1, bajo las condiciones del enunciado. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente.
i) Explique las diferencias entre ambas tarifas.

Respuesta 9:

i) El beneficio social se escribe como,

$$BS = \int_0^{q_1+q_2}(A - Bx)dx - q_1(a_1 + b_1 {q_1}^2) - q_2(a_2 + b_2 {q_2}^2) + \\ + \lambda((A - B(q_1 + q_2) - (a_2 + b_2 {q_2}^2))$$

Obteniendo las condiciones de primer orden,

$$\frac{\partial BS}{\partial q_1} = T_1 - 2b_1 {q_1}^2 - \lambda B = 0$$

$$T_1 = 2b_1 {q_1}^2 + \lambda B$$

y,

$$\frac{\partial BS}{\partial q_2} = -2b_2 {q_2}^2 - \lambda(B + 2b_2 q_2) = 0$$

$$\lambda = \frac{-2b_2 {q_2}^2}{B + 2b_2 q_2}$$

Luego,

$$T_1 = 2b_1 {q_1}^2 + \lambda B = 2b_1 {q_1}^2 - \frac{2Bb_2 {q_2}^2}{B + 2b_2 q_2}$$

ii) Ahora se maximiza el beneficio del operador,

$$Be = \left[(A - Bx)dx - (a_1 + b_1 {q_1}^2)\right]q_1 + \lambda((A - B(q_1 + q_2) - (a_2 + b_2 {q_2}^2))$$

Las condiciones de primer orden son,

$$\frac{\partial Be}{\partial q_1} = T_1 - Bq_1 - 2b_1 {q_1}^2 - \lambda B = 0$$
$$\frac{\partial Be}{\partial q_2} = -Bq_1 - \lambda(B + 2b_2 q_2) = 0$$

La tarifa en 1 será entonces igual a,

$$T_1 = 2b_1 {q_1}^2 + \frac{2Bq_1 q_2}{B + 2b_2 q_2}$$

iii) Ambas tarifa parten de la tarifa de primer mejor en 1 si ambas rutas estuvieran tarifadas. La tarifa óptima social en i) considera un descuento, luego la tarifa será menor a la tarifa de primer mejor. Ya la tarifa monopolista en ii) considera un adicional, alejando la tarifa al óptimo social.

Ejercicio 10 Tarificación por Infraestructura Vial

Considere la función de demanda inversa lineal de viajes entre un par OD: p(q) =A - B q. La función de costo medio percibido es = a + b q. Suponga que B = b y que A>>a.

i) Obtenga la tarifa que maximiza el bienestar social. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente. (Así encontrará el valor q óptimo. Reemplace este valor en la función de demanda inversa para obtener la máxima disposición al pago de los usuarios. A continuación, reemplace el valor de q en la función de costo medio y por último reste el costo medio a la máxima disposición al pago para obtener la tarifa.)

ii) Obtenga la tarifa de monopolio que maximiza el ingreso del operador de la Ruta. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente, tal como se le indicó en el punto i.

iii) Obtenga el valor de q que corresponde a la tarificación Ramsey si la recaudación (tarifa_ramsey * demanda, o t*q) ha de ser mayor igual a un valor C. En este caso, Ud. debe maximizar la función de bienestar social con la respectiva restricción, obtener el valor de q óptimo y demostrar que si lambda tiende a 0 se obtiene el valor de la demanda en i) y que si lambda tiende a infinito, se obtiene el valor de la demanda en ii).

Respuesta 10:

$$Bs = \int_0^q (A - Bx)dx - (a + bq)q$$

La condición de primer orden será,

$$\frac{\partial Bs}{\partial q} = (A - Bq) - (a + bq) - bq = 0$$

Luego la cantidad de usuarios que maximiza el bienestar social será,

$$q = \frac{A - a}{B + 2b}$$

Remplazando en la curva de demanda,

$$p(q) = A - B\frac{A-a}{B+2b}$$

La tarifa será la diferencia entre el precio en equilibrio menos el costo en equilibrio,

$$T = A - B\frac{A-a}{B+2b} - a - b\frac{A-a}{B+2b}$$

$$T = A - a - (b+B)\frac{A-a}{B+2b}$$

Entonces si B=b,

$$T = \frac{A-a}{3}$$

ii) Ahora se maximiza el beneficio del operador,

$$Be = [(A - Bq) - (a + bq)]q$$

$$\frac{\partial Be}{\partial q} = (A - Bq) - (a + bq) - (B + b)q = 0$$

$$q = \frac{A-a}{2(B+b)}$$

$$p(q) = A - B\frac{A-a}{2(B+b)}$$

$$T = A - B\frac{A-a}{2(B+b)} - a - b\frac{A-a}{2(B+b)}$$

$$T = \frac{A-a}{2}$$

iii) Ahora a la función de bienestar social será,

$$Bs = \int_0^q (A - Bx)dx - (a + bq)q + \lambda([(A - Bq) - (a + bq)]q - C)$$

$$\frac{\partial Bs}{\partial q} = (A - Bq) - (a + bq) - bq - \lambda[(A - Bq) - (a + bq) - Bq - bq] = 0$$

Luego, la cantidad de usuarios en equilibrio con tarifa Ramsey será,

$$q = \frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

En la curva de demanda el precio será,

$$p(q) = A - B\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

Y la tarifa será,

$$T = A - B\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)} - a - b\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

$$T = A - a - (B + b)\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

Si $\lambda = 0$, entonces, tenemos el caso del óptimo social sin restricción de Ramsey,

$$T = \frac{A - a}{3}$$

Si λ tiende a infinito, entonces tenemos el caso del óptimo social sin restricción de Ramsey,

$$T = A - a - (B + b)\frac{A - a}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)} + (B + b)\frac{(A - a)}{\frac{B + 2b}{\lambda} - (2B + 2b)}$$

$$T = \frac{A - a}{2}$$

Cuarta Lista de Ejercicios – ICT 3103
Tarificación Vial – Inversión en Infraestructura

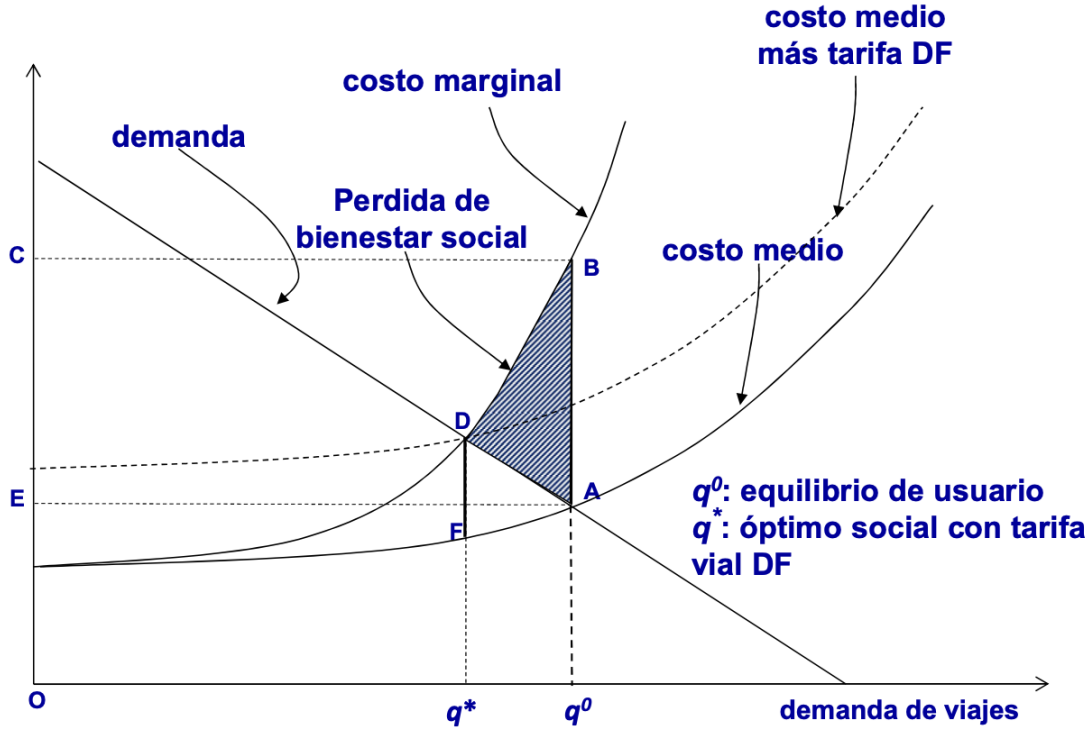
Ejercicio 1 Gráfico de equilibrio de vía congestionada

Considere una vía congestionada con curva de demanda inversa (d(q)) y una curva de costo medio igual a c(q), donde q es la cantidad de usuarios. Grafique:

i) el equilibrio en la sin tarificación:
ii) el equilibrio considerando el óptimo social
iii) la tarifa necesaria para el óptimo social
iv) la pérdida del bienestar social

Respuesta 1:

i) punto A
ii) punto D
iii) recta DF
iv) área entre puntos ABD



Ejercicio 2 Teorema de Mohring-Harwitz

Explique el teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem). Para ello debe explicar cada una de las tres condiciones del mismo y a qué resultado se arriba si se cumplen estas tres condiciones. (No basta con mencionar las tres condiciones: si alguna de las tres condiciones no está bien explicada, el ejercicio está mal resuelto.)

Respuesta 2:

El teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem) discute sobre la condiciones para que la tarifa de primer mejor cobrada al usuario permite recuperar exactamente el costo de la inversión en infraestructura. Para que el teorema se cumpla, las tres condiciones son: (1) que la función de costo generalizado $C_t(q,k)$ sea homogénea de grado 0, que permite aplicar la ecuación de Euler para funciones homogéneas de grado 0 y relacionar la recaudación con la derivada parcial del costo por la capacidad. La condición número (2) es la de considerar que la capacidad de la infraestructura es perfectamente divisible, lo que significa que k puede asumir cualquier valor positivo, eso implica la existencia de $\frac{\partial Ct}{\partial k}$. Por último, la tercera condición de que existan economías de escala constantes en la construcción de vialidad implica que el grado de economías de escala s sea igual a 1, igualando la recaudación total con el costo de provisión de más capacidad.

Ejercicio 3 Teorema de Mohring-Harwitz

Suponga que al resolver el problema de máximo bienestar social (sin considerar ningún tipo de restricción de presupuesto) la recaudación vial resulta ser mayor (menor) al monto de la inversión en infraestructura vial. ¿Qué supuesto del teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem) no se está cumpliendo? Explique

Respuesta 3:

Si la recaudación vial es mayor o menor al monto de inversión en la infraestructura, no se está cumpliendo el supuesto del teorema de Mohring-Harwitz de que existan economías de escala en la construcción de vialidad, ya que de ser el caso, el monto de inversión en infraestructura es igual a la recaudación vial.

Ejercicio 4

Demuestre matemáticamente el teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem). Para ello verifique T * q = C (T: tarifa vial; q: demanda; C: costo total de la infraestructura).

Respuesta 4:

Considerando una vía con curva de costo generalizado igual a $C(q,k)$ donde q es el número de usuarios, k es la capacidad de la vía que está congestionada y sujeta a una tarificación por congestión que optimiza el beneficio social. Y que $\rho(k)$ es el costo de capital que representa la magnitud de la inversión en infraestructura y el costo de oportunidad del capital.

Si se cumple el teorema de Mohring-Harwitz, el total recaudado por la tarifa, representado por $T \cdot q$ debe ser igual al costo total de inversión en infraestructura.

Sea la siguiente función de bienestar social, que se desea maximizar:

$$BS = \int_0^q p(x)dx - qC(q,k) - \rho(k)$$

La condición de primer orden en relación a [q] entrega la expresión de equilibrio en el óptimo social, considerando $q\frac{\partial C}{\partial q}$ como la tarifa cobrada.

$$\frac{\partial BS}{\partial q} = p(q) - C(q,k) - q\frac{\partial C}{\partial q} = 0$$

$$p(q) = C(q,k) + q\frac{\partial C}{\partial q}$$

La recaudación por la tanto, será igual a:

$$T \cdot q = q\frac{\partial C}{\partial q} \cdot q$$

Si realizamos la condición de primer orden en relación a la capacidad de la vía [k], tenemos la expresión que representa que la infraestructura se expande hasta que su costo marginal se iguale a los beneficios por descongestión:

$$\frac{\partial BS}{\partial k} = -q\frac{\partial C}{\partial k} - \frac{\partial \rho}{\partial k} = 0$$

$$-q\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{\partial \rho}{\partial k}$$

Se permite la expresión por considerar que la capacidad de la vía es continua y puede asumir cualquier valor positivo, una de las condiciones del teorema.

Considerando que la función de costo es homogénea y de grado 0, podemos escribir la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial C}{\partial k}k + \frac{\partial C}{\partial q}q = 0$$

Luego, podemos escribir la recaudación total como:

$$T \cdot q = q\frac{\partial C}{\partial q} \cdot q = -q\frac{\partial C}{\partial k}k$$

Según la expresión obtenida en [k],

$$T \cdot q = -q\frac{\partial C}{\partial k}k = -q\frac{\partial C}{\partial k}k = \frac{\partial \rho}{\partial k}k = \frac{\rho}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial k}k = \rho\frac{1}{s}$$

Donde s es el grado de economía de escala en la construcción de infraestructura vial,

Si queremos que se cumpla el autofinanciamiento, entonces:

$$T \cdot q = \rho\frac{1}{s} = \rho$$

Luego, s=1, o sea que deben existir economías de escala constantes en la construcción de vialidad, tercera condición del teorema.

Ejercicio 5 Tarifa vial

Considere las funciones de demanda inversa lineal de viajes para hora punta y hora fuera de punta $P_p(Q_p) = A_p - B_p Q_p$ y $P_f(Q_f) = A_f - B_f Q_f$ respectivamente. La función de costo medio de viaje está dada por $\alpha \left(\frac{Q}{K}\right)^2$, donde Q depende del valor correspondiente a la hora del día. El costo de la infraestructura está dado por τK.

Suponga los siguientes valores A_p = 1600, B_p = -1,5, A_f = 800, Bf = -1, τ = 51,8, alfa = 150 y K = 2000. Suponga también que el valor del tiempo es igual a 1 (uno).

i) Calcule la tarifa vial para la hora punta y para la hora fuera de punta.
ii) Verifique que se cumple el resultado señalado en el teorema de Mohring-Harwitz (recaudación igual a gasto de capital en vialidad).

Respuesta 5:

i) Consideramos la función de beneficio social:

$$BS = \int_0^{Q_p} (A_p - B_p x)dx - \alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 Q_p + \int_0^{Q_f} (A_f - B_f x)dx - \alpha \left(\frac{Q_f}{K}\right)^2 - \tau K$$

La tarifa óptima será determinada por las condiciones de primer orden del número de usuarios en hora punta y fuera de punta, entonces:

$[Q_p]: (A_p - B_p Q_p) - \alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 - 2\alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 = 0$, sustituyendo los valores y solucionando la ecuación se encuentra que $Q_p = 992{,}75$. Luego, se debe aplicar en la expresión de la tarifa, $T = 2\alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 = 73{,}9$. Para considerar la tarifa óptima en hora punta.

Análogamente,

$[Q_f]: (A_f - B_f Q_f) - \alpha \left(\frac{Q_f}{K}\right)^2 - 2\alpha \left(\frac{Q_f}{K}\right)^2 = 0$, y $Q_f = 738{,}62$ y la tarifa óptima será igual a 40,9.

ii) La recaudación total será igual:

$$Q_f \cdot T_f + Q_p \cdot T_p = 103.573{,}783$$

El costo de provisión de infraestructura, será igual a $\tau K = 103.600$, se puede decir que se cumple el teorema del financiamiento.

Ejercicio 6 Función homogénea de grado 0

Que implica considerar que la función de costo $C_t(q_t, k)$ es homogénea de grado 0. Considere una función de costo del tipo $C_t(q_t, k) = \alpha(\frac{q_t}{k})^3$. ¿Es función es homogénea de grado 0?

Respuesta 6:

Una función $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ es homogénea de grado n, cuando al multiplicar todas sus variables independientes por una constante t, se cumple que:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_k) = t^n f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Cuando una función es homogénea de grado n, se aplica la ecuación de Euler,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Luego, considerando $C_t(q_t, k) = \alpha(\frac{q_t}{k})^3$, para cualquier valor de t , $\alpha(\frac{tq_t}{tk})^3 = \alpha(\frac{q_t}{k})^3$, luego n = 0. Siendo una función homogénea de grado 0.

Ejercicio 7 Tarificación Vial

Suponga que se establece tarificación vial en una ciudad (usando la tarificación óptima estática vista en clases), bajo los supuestos del teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem): homogeneidad de grado cero de la función de costos medios de viaje, divisibilidad de la infraestructura y economías de escala constantes en la construcción de la infraestructura.

Suponga que la recaudación por tarificación vial es mayor que el costo de proveer la infraestructura, incluyendo el costo de oportunidad del capital. Explique qué implicancia tiene ello desde el punto de vista de la posible subinversión o sobreinversión en capacidad vial.

Respuesta 7:

Si la recaudación es mayor que el costo de proveer infraestructura, y se cumple la condición de que existen retornos constantes a escala (grado de economía de escala = 1), entonces existe una subinversión en capacidad vial.

Ejercicio 8 Tarificación Vial

Considere la función de demanda inversa p(q) para un viaje entre un par OD. Suponga la existencia de dos rutas que permiten realizar el viaje, cada una de ellas con costo medio percibido ci(qi, ki) (i = 1, 2) (q = q1 + q2; q: demanda total, qi: demanda ruta i; ki: capacidad vial ruta i). El costo de la infraestructura para cada ruta está dado por la función ρ(ki) (i = 1, 2).

i) Plantee el problema de máximo bienestar social:

a) Derive la condición de primer orden con respecto a qi (i = 1, 2).

b) Deduzca la ecuación que establece la tarifa vial igual al costo marginal social de congestión.

c) Derive la condición de primer orden con respecto a ki (i = 1, 2) y determine la regla de inversión óptima.

ii) Suponga que solo se puede tarificar la Ruta 1. Ello implica colocar la siguiente restricción en el problema de maximización de bienestar social , cuyo significado es que el costo de viajar ha de ser igual al costo medio percibido de viaje en la Ruta 2.

a) Determine la tarifa óptima segunda mejor a cobrar en la Ruta 1. Para ello derive la función de bienestar social con restricción con respecto a q1 y q2, despeje el valor del multiplicador de Lagrange en la condición de primer orden correspondiente a q2 y reemplace en la condición de primer orden correspondiente a q1.

b) Demuestre que si la demanda es infinitamente elástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es la que corresponde a la solución primera mejor.

c) Demuestre que si la demanda es infinitamente inelástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es igual a la diferencia de la externalidad de congestión entre la Ruta 1 y la Ruta 2. Explique en qué caso esta tarifa sería un subsidio.

d) por último deduzca la regla de inversión óptima para cada ruta.

Respuesta 7: Ver clase 2_1_1

Ejercicio 9 Viajes par OD

Considere la función de demanda inversa lineal de viajes entre un par OD: p(q) =A - B q. Se puede viajar por dos rutas, tal que q = q1 + q2. Las funciones de costo medio percibido para la Ruta 1 y la Ruta 2 son respectivamente CMe1 = a1 + b1 q1 y CMe2 = a2 + b2 q2.

i) Obtenga la demanda óptima social.
ii) Obtenga la demanda de equilibrio de usuario bajo el supuesto que no existe tarificación vial.
iii) Demuestre que con tarificación vial, la solución de equilibrio de usuario es un óptimo social.
iv) Resuelva los puntos i) y ii) suponiendo A = 160; B = 0,5; a1 = 50, b1 = 0,5, a2 = 10 y b2 = 1. Verifique que la solución en i) genera un mayor bienestar social ($ 6.786) que en ii) ($ 5.476).

Respuesta 9:

i) Deben escribir la función de beneficio social:

$$BS = \int_0^{q_1+q_2} p(x)dx \; - \; q_1 c_1 - \; q_2 c_2$$

Por las condiciones de primer orden:

$$[q_1]: A - B(q_1 + q_2) - c_1 - q_1 \frac{\partial c_1}{\partial q_1} = 0$$
$$[q_2]: A - B(q_1 + q_2) - c_2 - q_1 \frac{\partial c_2}{\partial q_2} = 0$$

Solucionando el sistema de ecuaciones, se encuentra que la demanda óptima es:

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + b_1 b_2}$$

ii) Si no hay tarificación vial, el equilibrio se da con el costo medio, el sistema de ecuaciones será igual a:

$$[q_1]: A - B(q_1 + q_2) - c_1 = 0$$
$$[q_2]: A - B(q_1 + q_2) - c_2 = 0$$

Solucionando el sistema de ecuaciones, se encuentra que la demanda óptima es:

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + 2 b_1 b_2}$$

iii) Si existe tarificación vial de forma que,

$$T_1 = q_1 \frac{\partial c_1}{\partial q_1} \; y \; T_2 = q_2 \frac{\partial c_2}{\partial q_2}$$

Entonces, el equilibrio de usuarios se iguala al sistema de ecuaciones propuesto en 1. Lugo el equilibrio de usuarios en tarificación es igual al óptimo social.

iv) Sustituyendo los valores se encuentra que en i;

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + 2 b_1 b_2} = \; 105{,}71$$

Y por las condiciones de equilibrio,

$$A - B(q_1 + q_2) - a_1 - 2 q_1 b_1 = 0$$
$$A - B(q_1 + q_2) - a_2 - 2 q_2 b_2 = 0$$

$$q_1 = 57{,}15$$
$$q_2 = 48{,}56$$

Luego, el beneficio social será igual a,

$$BS = \int_0^{105{,}71} (160 - 0{,}5x)dx \; - \; 57{,}15 \cdot (50 + 0{,}5 \cdot 57{,}15) - 48{,}56 \, (10 + 1 \cdot 48{,}56) = \$6786$$

Sustituyendo los valores se encuentra que en ii;

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + b_1 b_2} = \; 148$$

Y por las condiciones de equilibrio,

$$A - B(q_1 + q_2) - a_1 - q_1 b_1 = 0$$
$$A - B(q_1 + q_2) - a_2 - q_2 b_2 = 0$$

$$q_1 = 72$$
$$q_2 = 76$$

Luego, el beneficio social será igual a,

$$BS = \int_0^{148} (160 - 0{,}5x)dx \; - \; 72 \cdot (50 + 0{,}5 \cdot 72) - 76\,(10 + 1 \cdot 76) = \$5476$$

Luego, luego de la tarificación vial, el beneficio social aumenta.

Ejercicio 10 Política de Impuestos

Sobre políticas de impuestos, responda los siguientes ítems:

i) Explique la relevancia del impuesto a los combustibles a nivel nacional.
ii) Explique por qué el impuesto a los combustibles se trata del principal pago que realizan los automovilistas en relación al uso del vehículo.
iii) ¿Las agencias nacionales dedicadas a la construcción y mantenimiento de infraestructura vial están sujetas a disciplina de mercado?
iv) Describa cuáles son las dos agencias gubernamentales más relevantes a nivel nacional en la provisión y mantenimiento de la infraestructura vial.
v) ¿Por qué se dice que existe amplio margen para dar mayor racionalidad a la inversión y mantenimiento de la infraestructura vial?
vi) Compara la vialidad urbana con la vialidad interurbana, ¿en cuál de estos dos ámbitos existiría una mejor asignación de recursos?
vii) ¿cuál es el principal pago que realizan los automovilistas por el uso del vehículo?
viii) ¿Es el permiso de circulación un cobro al uso de la vialidad? ¿Es el impuesto al NOX un cobro al uso de la vialidad?
ix) ¿Cómo se financian las autopistas urbanas? ¿opera la disciplina de mercado en estos casos?
x) en base a la materia vista en clase, explique las siguientes dos aseveraciones: ¿existe sobreinversión vial?; ¿las automovilistas no pagan el costo marginal de la congestión?

Respuesta 10:

i) El impuesto a los combustibles es el principal impuesto relacionado al uso del automóvil y es relevante nacionalmente ya que fue concebido para la recuperación de la vialidad luego del terremoto de 1985. El impuesto es el único en función del uso del vehículo, lo que en un primer momento podría relacionarse con costos sociales externos al uso del automóvil. Sin embargo, la magnitud del impuesto, de cerca de $40 pesos/km es inferior a estimaciones del costo de externalidades por

kilómetro recorrido. Por ejemplo, solo la externalidad de congestión fue calculada por Rizzi y de la Mazza (2017) en $317 en hora punta y $67 en hora valle para Santiago. Ambos superiores al monto asociado al impuesto de combustibles. En resumen, si bien es el impuesto principal asociado al uso, no cubre la totalidad de los costos de inversión en vialidad y los costos de las externalidades del uso del automóvil.

ii) El impuesto a los combustibles es el principal pago por el uso del vehículo porque está asociado a la distancia recorrida. Cuanto más usan el automóvil, más los usuarios consumen combustible, y por lo tanto, más pagan de impuesto en total. El permiso de circulación independe del kilometraje recorrido.

iii) No, las agencias no están sujetas a disciplinas de mercado ya que toman decisiones en bases a criterios administrativos, políticos y de evaluación social de proyectos.

iv) El Ministerio de Vivienda y Urbanismo, por la Dirección General de Obras Urbanas, está a cargo de obras de pavimentación urbana, mientras que el Ministerio de Obras Públicas, se encarga de la construcción, conservación y mejoramiento de caminos, puentes, cruces desnivelados, túneles y pasarelas.

v) Se dice que existe amplio margen para dar mayor racionalidad a la inversión y mantenimiento de la infraestructura vial porque probablemente haya sobreinversión en vialidad y en el uso del automóvil, ya que los costos de las externalidad no son traspasados a los usuarios. El costo marginal de la infraestructura vial supera sus beneficios marginales, al igual que el costo marginal por el uso del vehículo privado supera su beneficio marginal.

vi) La vialidad urbana generalmente no está sujeta a inversiones por medio de concesiones y suele ser financiada a través de inversión del estado. Mientras que en la vialidad interurbana, en algunos casos, está concesionada, recuperando la inversión a través del cobro de peaje, por lo que los recursos asignados a la viabilidad interurbana estarían mejor asignados.

vii) El principal pago que realizan los automovilistas por el uso del vehículo es el impuesto de combustibles, ya que este es proporcional a la distancia recorrida en automóvil

viii) No, ya que el cobro no se hace en función del uso, si no que en función de la antigüedad y del tipo del vehículo, independiente de la distancia total que este recorre en las vías.

ix) Las autopistas son financiadas de modo que el cobro de peaje recupere la inversión privada, sumada a un margen de ganancias. Por lo tanto, el cobro de peaje no tiene relación al cobro de externalidades del vehículo, como la congestión, no siguiendo la lógica microeconómica para la determinación de las tarifas. Además, las empresas licitadas tienen tarifa y alzas previstas por contrato, y no pueden realizar un cambio tarifario en función de la dinámica del mercado.

x) Existe una sobreinversión vial, ya que el costo percibido por los usuarios no refleja las externalidades como congestión, accidentes y emisiones, por ejemplo. Por lo que

el costo marginal de la infraestructura vial superaría su beneficio marginal. Los automovilistas no pagan su costo marginal de la congestión, aun cuando existan peajes en las autopistas, estos son concebidos para recuperar la inversión en la infraestructura y no necesariamente se acercan a la tarifa de congestión óptima.

28 de octubre de 2024

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO INGENIERIA DE TRANSPORTE Y LOGISTICA
ICT3103 ECONOMIA DE TRANSPORTE - 2º SEMESTRE 2024
INTERROGACION 2

Dispone de *una hora y cuarenta minutos* para responder la interrogación. En paréntesis figura el puntaje de cada pregunta. i) Sus respuestas tienen que ser autocontenidas, nada se dará por sobrentendido al corregir; ii) cuando dice explicar, debe proveer un argumento que justifique de manera adecuada su respuesta haciendo uso de los contenidos aprendidos en el curso; iii) en los desarrollos matemáticos, debe explicarse la notación utilizada. Ídem si hace gráficos. iv) Todas las preguntas deben ser respondidas de puño y letra.

1) Tarificación e inversión en infraestructura vial. i) Explique el teorema de Mohring-Harwitz (teorema de autofinanciamiento). Debe plantear y explicar los tres supuestos del teorema y el resultado que se obtiene. (0.66) ii) Suponga que se cumplen las tres condiciones del teorema de autofinanciamiento y que se tarifica a costo marginal de la externalidad de congestión. Explique cómo se determina si la provisión actual de infraestructura vial es insuficiente, suficiente o excesiva en relación a la demanda vial. (0.33) (16% de la nota)

2) Tarificación en infraestructura vial - modelo congestión estática. Considere las funciones de demanda inversa de viajes para hora punta y hora fuera de punta $P_p(Q_p) = A_p - B_p Q_p$ y $P_f(Q_f) = A_f - B_f Q_f$, respectivamente. La función de costo medio de viaje en ambos períodos está dada por a + b Qi, (i: punta, fuera de punta). Suponga los siguientes valores $A_p = 900$, $B_p = 20$, $A_f = 500$, $B_f = 20$, a = 100 y b = 10.

i) Determine numéricamente la tarifa óptima social para cada período del día. Para ello debe resolver el problema de maximización del bienestar social.
ii) Determine numéricamente la tarifa para cada período del día que maximiza el beneficio de un operador privado.
Sugerencia: en ambos casos, plantee las CPO, despeje el valor de Qi y obtenga su valor numérico. Luego reemplace este valor numérico en la ecuación de la tarifa y obtenga el valor numérico de la tarifa. (18% de la nota)

3) Tarificación en infraestructura vial - Modelo de Cuello de Botella. Considere el modelo de cuello de botella, con tarificación vial. Suponga i) la existencia de una función de demanda inversa P(N), ii) el costo medio del usuario es $\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N}{\omega}$ y iii) el costo por unidad de infraestructura es c_ω, constante. (β: costo de llegar temprano, γ: costo de llegar tarde, ω: inversión en infraestructura vial, medido en unidades).

Demuestre que se cumple el teorema de autofinanciamiento. Para ello proceda así: i) plantee el problema de maximización del bienestar social que permita obtener la demanda óptima y la inversión óptima. (0.25) ii) Obtenga las condiciones de primer orden con respecto a la demanda y a la inversión en infraestructura vial. (0.25) iii) Obtenga la ecuación que establece el valor de la tarifa óptima social. (0.15) iv) A partir de las dos condiciones de primer orden, demuestre que la tarifa óptima social multiplicada por el valor de la demanda es exactamente igual al costo total invertido en infraestructura vial. (0.35) (16% de la nota)

4) Provisión de infraestructura vial y su financiamiento en Chile

i) Explique por qué el impuesto a los combustibles es un instrumento económico que se asemeja a una tarifa vial.

ii) Explique cuáles son las dos agencias gubernamentales más relevantes a nivel nacional en la provisión y mantenimiento de la infraestructura vial. Debe quedar claro el ámbito de acción de cada una de ellas.

iii) Explique por qué hemos dicho en clase que las agencias nacionales dedicadas a la construcción y mantenimiento de infraestructura vial no están sujetas a disciplina de mercado.

iv) Explique qué tipo de restricción, y su razón, se coloca en los contratos entre el estado y los operadores privados cuando se hacen concesiones de inversión y operación de infraestructura vial. (12 por ciento de la nota)

28 de octubre de 2024

5) Inversión y tarificación de sistemas de transporte público. Considere un servicio expreso de Metro entre dos terminales aeroportuarias que permite subir a todos los pasajeros en un solo instante. De esta manera, el tiempo de viaje en cada dirección es fijo igual a T y se puede suponer que el tiempo de ciclo es 2T. Suponga que el costo por hora de operar un tren es (C_0 + C_1K) donde K es su capacidad y C_0 y C_1 parámetros de la función de costo. El valor del tiempo de espera es V_e y el tiempo promedio de espera es 0,5/f (la mitad del intervalo entre trenes); f: frecuencia y el valor del tiempo de viaje es V_v. Suponga que la demanda en cada dirección es igual a D por hora, tal que la suma de las demandas es igual a 2D por hora.

i) Plantee una función de costo social que incluya el costo por hora del operador y el costo por hora de los usuarios por tiempo de espera y tiempo de viaje. (0.30) ii) Determine matemáticamente la frecuencia del servicio y la capacidad de los buses a fin de minimizar el costo social. (0.60) iii) Explique qué efecto tiene el valor del tiempo de viaje sobre la frecuencia y capacidad óptimas. (0.10) (18% de la nota)

(Una ayuda: la frecuencia en función de la demanda es $\frac{D}{K} = f$.)

6) Transporte público y subsidios. Considere la situación en que transporte privado y transporte público son substitutos perfectos para realizar un viaje; es decir, Q = q_{bus} + q_{auto}. suponga además que el transporte privado no está tarificado. La función de bienestar social es la siguiente:

$$BS = \int_0^{q_{auto}+q_{bus}} p(x_1)\,dx_1 - q_{auto}C_{auto}(q_{auto}) - q_{bus}\left(CMe_{operador}(q_{bus}) + CMe_{usuario}(q_{bus})\right)$$

El costo medio por pasajero de bus es igual a la suma del costo medio del operador más el costo medio del usuario (Cme_{bus} = $Cme_{operador}$ + $Cme_{usuario}$). Suponga que el primero es constante y el segundo decreciente; es decir, $\frac{\partial CMe_{operador}(q_{bus})}{\partial q_{bus}} = 0 \wedge \frac{\partial CMe_{usuario}(q_{bus})}{\partial q_{bus}} < 0$.

i) Plantee el problema matemático de optimización que permita calcular la tarifa del bus óptima social, considerando que no existe tarifa vial. (0.20) ii) Obtenga las condiciones de primer orden. (0.25) iii) A partir de las condiciones de primer orden, determine la tarifa óptima social del bus. (0.40) iv) Explique si es necesario otorgar un subsidio a la operación del transporte público y sus razones. (0.15) (20 % de la nota)

6 de noviembre de 2023

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO INGENIERIA DE TRANSPORTE Y LOGISTICA
ICT3103 ECONOMIA DE TRANSPORTE - 2º SEMESTRE 2023
INTERROGACION 2

Dispone de *una hora y cuarenta minutos* para responder la interrogación. En paréntesis figura el puntaje de cada pregunta. i) Sus respuestas tienen que ser autocontenidas, nada se dará por sobrentendido al corregir; ii) cuando dice explicar, debe proveer un argumento que justifique de manera adecuada su respuesta haciendo uso de los contenidos aprendidos en el curso; iii) en los desarrollos matemáticos, debe explicarse la notación utilizada. Ídem si hace gráficos. iv) Todas las preguntas deben ser respondidas de puño y letra.

1) Tarificación e inversión en infraestructura vial. i) Explique el teorema de Mohring-Harwitz (teorema de autofinanciamiento). Debe plantear y explicar los tres supuestos del teorema y el resultado que se obtiene. (66%) ii) Suponga que se cumplen las tres condiciones del teorema de autofinanciamiento y que se tarifica a costo marginal. Explique cómo se determina si la provisión actual de infraestructura vial es insuficiente, suficiente o excesiva en relación a la demanda vial. (33%) (15% de la nota)

2) Tarificación en infraestructura vial - modelo congestión estática. Considere la función de demanda inversa lineal de viajes entre un par OD: $p(q) = A - B\,q$. Se puede viajar por dos rutas, tal que $q = q_1 + q_2$. Las funciones de costo medio percibido para la Ruta 1 y la Ruta 2 son respectivamente $CMe_1 = a_1 + b_1\,q_1$ y $CMe_2 = a_2 + b_2\,q_2$, con $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$; en otras palabras, las dos rutas ofrecen el mismo nivel de servicio.

i) Determine la tarifa óptima social que corresponde a cada ruta. Para ello debe resolver el problema de maximizar el bienestar social. (50%)

ii) Suponga que cada ruta es operada por un operador que funciona como un maximizador de beneficios (duopolio). Obtenga la tarifa a cobrar por cada uno de ellos. Para ello debe resolver el problema de maximizar el beneficio del duopolista bajo el supuesto que ambos agentes ejercen el mismo poder de mercado. (50%)

(18% de la nota)

3) Tarificación en infraestructura vial. En el modelo de cuello de botella, suponga que alfa = 2 * beta y que gamma → ∝. Suponga que no hay tarificación vial. i) Obtenga la hora de inició y la hora de fin del período punta. (Escriba directamente la fórmula vista en clase que corresponde aplicar en este caso y luego reemplace en ella). (20%) ii) Determine el tiempo de viaje en función de la hora de arribo. (Escriba directamente la fórmula vista en clase que corresponde aplicar en este caso y luego reemplace en ella). Determine también el instante en que se produce la última salida (20%) iii) Grafique la solución de equilibrio que muestre el instante en que comienza a armarse la cola de vehículos, los tiempos de espera en cola y el instante en que se disipa la cola, en función del tiempo. Este gráfico debe identificar, en el eje de las abscisas, el instante en que se produce la última salida. (Este gráfico tiene por eje de abscisa el tiempo y por eje de ordenas el número de vehículos). (60%)
(15 por ciento de la nota)
Fórmulas claves:
$t_e = t^* - \gamma/(\beta + \gamma)$ N/ ω, hora de inicio de la cola
$t_l = t^* + \beta/(\beta + \gamma)$ N/ ω , hora en que se disipa la cola
$T^v = \beta / \alpha\ (t^{arribo} - t_e)$, tiempo de viaje para quien llega temprano
$T^v = \gamma / \alpha\ (t_l - t^{arribo})$, tiempo de viaje para quien llega tarde
$\tau(t_{arribo}) = \beta\ (t_{arribo} - t_e)$, tarifa para quienes arriban temprano
$\tau(t_{arribo}) = \gamma\ (t_l - t_{arribo})$, tarifa para quienes arriban tarde

4) Provisión de infraestructura vial. Explique:

i) Suponga que existen de economías de escala decrecientes en la construcción de infraestructura vial y que las otras dos condiciones del teorema de autofinanciamiento se cumplen. Explique qué ocurre con los ingresos del operador si se tarifica a costo marginal en relación a los costos de infraestructura.

ii) Considere una carretera que une longitudinalmente un país o una región. Pensando desde el bienestar de los consumidores, ¿conviene que la carretera sea operada por un solo operador o que la misma sea dividida en tramos, cada uno operado por una empresa diferente? Suponga que los operadores son empresas maximizadoras de beneficios.

iii) Bajo qué condiciones se recurre a la tarificación vial Ramsey.

(12% de la nota)

5) Transporte público, frecuencia y capacidad óptima. i) Plantee un modelo que permita determinar la frecuencia y capacidad social óptima bajo los siguientes supuestos: (35%)

a) El tiempo de ciclo se compone del tiempo en movimiento de las micros y del tiempo en paradero. El tiempo en paradero *t* es independiente de la cantidad de pasajeros que bajan y suben. El largo del recorrido, circuito circular unidireccional, es de *L* km y existe una parada cada 1 (un) km. Así el tiempo de ciclo es $T + t\,L$.
b) Cada pasajero recorre un trayecto de *l* km, por lo que su tiempo de viaje es $(T + t\,L)\,l/L$.
c) Los arribos de los buses son perfectamente espaciados y los pasajeros arriban al paradero con distribución uniforme entre arribos de buses.
d) La restricción de capacidad se cumple en igualdad: $Y/f * l/L = K$
e) El costo de operar un bus por hora es $C_0 + C_1\,K$.
f) El valor del tiempo de espera y tiempo de viaje son respectivamente V_e y V_v.

ii) Resuelva el modelo anterior para obtener la frecuencia y capacidad óptima. (35%)

iii) Explique cómo afectan el costo variable C_1, el valor del tiempo de viaje y el tiempo de detención en paradero la frecuencia y capacidad óptimas. (30%)

(18% de la nota)

6) Transporte público y desregulación. i) Plantee un modelo que permita determinar la probabilidad de que un pasajero deje pasar una micro de alto costo para esperar una próxima micro de bajo costo. Considere estas variables:

te: tiempo de espera promedio (o intervalo promedio de arribo entre micros consecutivas)
P_w: valor subjetivo del tiempo de espera; $P_w > 0$
p_a: tarifa alta; p_b: tarifa baja
Pr_b: probabilidad de que arribe un bus de tarifa baja después de que haya arribado un bus de tarifa alta. (70%)

ii) Suponga que i) la diferencia de precios entre p_a y p_b es \$1.500, ii) el tiempo de espera promedio es 5 minutos y iii) la probabilidad de que la próxima micro sea de precio bajo es 0,334. Determine el rango del valor del tiempo (en \$ / min) de las personas que preferirán esperar a la próxima micro antes que abordar la micro de precio alto. (30%)

(10% de la nota)

7) Transporte público y desregulación. Explique los tres principales argumentos vistos en clase para subsidiar el transporte público. (12% de la nota)

Tercera Lista de Ejercicios – ICT 3103
Beneficios por Conectividad en el Transporte de Carga

Ejercicio 1 Beneficio por Transporte de Carga

Considere el mercado 1 donde para un cierto bien sólo existe demanda y el mercado 2 donde sólo existe oferta para ese mismo bien. Las curvas de demanda en 1 y oferta en 2 están dadas por:

$Q_{D1} = 1250 - P_1 / 4 \Leftrightarrow$
$Q_{O2} = 2 \cdot P_2 - 200$

I. Derive la demanda por transporte entre los dos mercados.
II. Encuentre el equilibrio (transporte, producción y consumo) Suponga la siguiente función de costos totales de transporte:
$C = 3000 + 1300 \cdot Q + Q^2 / 2$

Respuesta 1:

I.

En primer lugar, se calcula la función inversa de exceso de demanda del mercado 1. Como no hay producción, basta con invertir la curva de demanda.

$$ED^{-1}(Q_{D1}) = 5000 – 4 \cdot Q_{D1}$$

En segundo lugar, se calcula la función inversa de exceso de oferta del mercado 2: como no hay demanda, basta con invertir la curva de oferta:

$$EO^{-1}(Q_{O2}) = 100 + 1 / 2 \cdot Q_{O2}$$

Tercero, se resta la segunda curva a la primera para obtener la curva de demanda inversa de transporte:

$$ED^{-1}(Q_{D1}) - EO^{-1}(Q_{O2}) = T(Q) = 4.900 – 9 / 2\ Q$$

II.

En competencia perfecta el precio iguala al costo marginal. Así, la condición de equilibrio en el mercado de transporte entrega un valor **Q = 654,5**.

Reemplazamos el valor de 654,5 unidades en la curva de exceso de demanda inversa de transporte y obtenemos el precio cobrado por el transportista: **$1.954,5** por unidad transportada.

El precio al que se vende el producto en la localidad 1 es **$2.381,8**. El precio de producción del bien es igual a **$ 427,5**.

Excedente medido bajo la curva de transporte: $\int_0^{654,5}\left(4900-\frac{9}{2}q\right)dq-654,5\cdot 1954,5=$ **$963.967.**

Área bajo la curva de exceso de demanda inversa de consumo de la localidad 1: $\int_0^{654,5}(5000-4q)dq-654,5\cdot 2381,8=\$856.859,5$

Área sobre la curva de exceso de oferta inversa de consumo en la localidad 2 es **$107.107**.

$$654,5\cdot 427,3-\int_0^{654,5}\left(100+\frac{1}{2}q\right)dq=\$107.107,4$$

Al sumar, se obtiene **$963.967**. Medir beneficios bajo la curva de demanda por el insumo nos entrega el beneficio social.

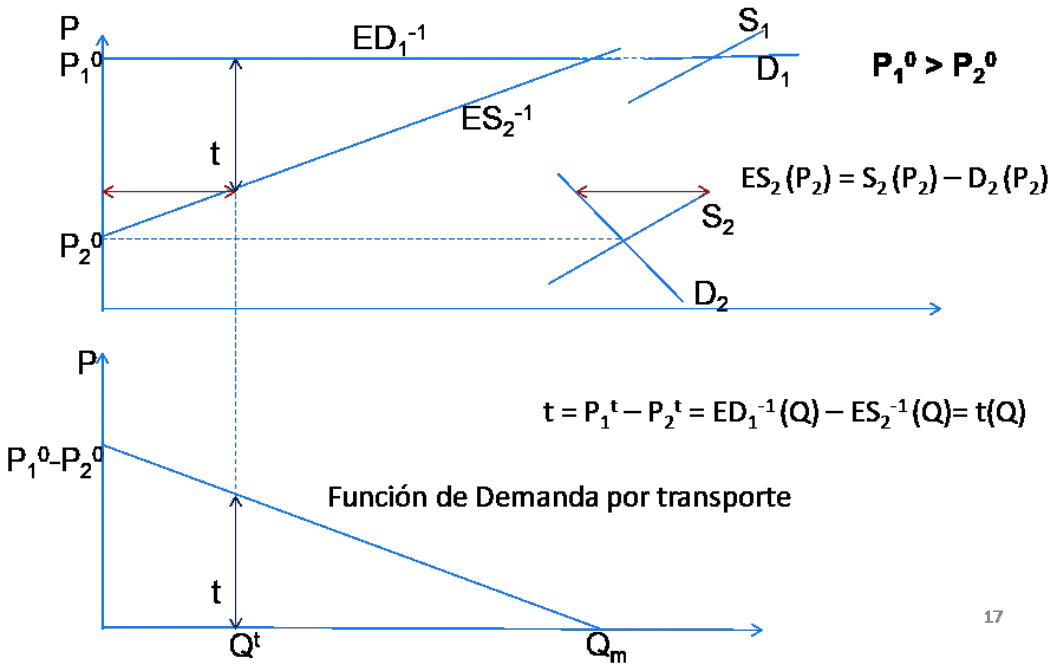
Si la curva de demanda no depende del ingreso (o es efecto del ingreso es despreciable) y que, en la variación de precios considerada, la curva de demanda es lineal o próxima a ser lineal.

Ejercicio 2 Demanda Elástica en Mercado Importador

¿Qué ocurre si, en el mercado importador, la demanda es infinitamente elástica y el precio del transporte es tal que permite el comercio entre las dos regiones? Grafique y comente el resultado

Respuesta 2:

En este caso, la función de exceso de demanda inversa en el mercado importador es igual a P fijo, donde P es el precio al que la demanda está dispuesta a pagar por cualquier cantidad ofertada. Por otro lado, habrá una función de exceso de oferta inversa en el mercado exportador. Al calcular la diferencia vertical entre estas dos funciones, se obtiene la función de demanda inversa de transporte.



Finalmente en la región 1, se vende toda la producción local más el exceso de oferta producido en la región 2.

Ejercicio 3 Escenarios de Demanda y Oferta

I. ¿Qué ocurre si tanto en el mercado exportador como en el mercado importador las curvas de demandas son infinitamente o perfectamente elásticas y el precio del transporte entre las regiones es menor a la diferencia entre los precios que la demanda está dispuesta a pagar en ambos mercados? Suponga que las curvas de oferta tienen pendiente positiva en ambos mercados y el costo de producir es menor en el mercado 2. Explique cómo cambian los excedentes del productor en ambos mercados al existir transporte.

II. ¿Qué ocurre si tanto en el mercado exportador como en el mercado importador las curvas de oferta son infinitamente o perfectamente elásticas y el precio del transporte es menor a la diferencia entre el costo medio de producción entre ambos mercados? Suponga que el precio de producir es menor en el mercado 2 y que ambas curvas de demanda tienen pendiente negativa. Explique cómo cambian los excedentes del consumidor en ambos mercados al existir transporte.

Respuesta 3:

I. Debe darse cuenta que los consumidores en la región 2 quedan fuera de mercado y toda la producción de la región 2 se exporta al mercado 1 donde existe una mayor disposición al pago. En el mercado 1, también se consume la producción local y el total producido en la región 2.

II. Debe darse cuenta que los productores en la región 1 desaparecen y que los productores en la región 2 abastecen el consumo local y el de la región 1.

Ejercicio 4 Impuesto Ambiental

Considere que en las ciudades A y B se produce y consume un mismo bien q de manera competitiva y que el transporte entre ellas es realizado por empresas en competencia perfecta cuyo costo marginal es constante e igual a m. Debido a una reforma ecológica se decidió aumentar el precio del combustible, cuyo efecto aumenta el costo marginal de los transportistas. Muestre gráficamente el cambio en los beneficios de productores y consumidores. Este análisis debe hacerlo considerando el mercado de transporte y el mercado del bien q en ambas localidades.

Respuesta 4:

Ejercicio 5 Intercambio de Carga

Parte A: Considere el modelo de demanda agregada por servicios de transporte. Las funciones de demanda y oferta de cada región son las siguientes:

Región 1:
Demanda: $P_1^D = 160 - Q_1^D$
Oferta: $P_1^S = 20 + Q_1^S$

Región 2:
Demanda: $P_2^D = 50$
Oferta: $P_2^S = 10 + Q_2^S$

I. Encuentre la función de demanda por transporte

Suponga que el costo unitario de transporte es ct = 24. Encuentre

II. La tarifa y la cantidad transportada
III. Los precios de cada región
IV. Las cantidades consumidas y producidas en cada región

Parte B: Repita el ejercicio suponiendo que la curva de demanda inversa en el mercado 1 es $P_1^D = 180 - Q_1^D$

Respuesta 5:

Parte A: Se transportan 32 unidades de la Región 2 a la Región 1. El precio de venta en la Región 1 es de $74; la demanda total en la Región 1es 86 unidades y 54 son producidas localmente. En la Región 2, se vende a $50 un total de 8 unidades. La producción total es de 40 unidades, 32 de ellas se exportan.

Parte B: En este caso se exportan 44 unidades, que se producen en el mercado de la Región 2 a $54. En la Región 1, el producto se vende a $78. La demanda total es 102 unidades, de las que se producen localmente 58 unidades. En el mercado 2 la demanda es cero y toda la producción (44 unidades) se exporta.

Ejercicio 6

Formule matemáticamente en problema de comercio entre regiones con mercado de transporte, bajo el supuesto que la curva de oferta de este mercado presente costas marginales constantes (esto significa economías de escala constantes)

Respuesta 6:

$$BS = \int_0^{q_1(t)+q_{21}(t)} p_1(u)\,du + \int_0^{q_2(t)} p_2(u)\,du - C_1\left(q_1(t)\right) - C_2\left(q_2(t)+q_{21}(t)\right) - q_{21}(t)\,t$$

BS es la función de bienestar social que maximiza la suma de los excedentes de los consumidores y productores en ambos mercados. En esta función los costos de transporte se restan dado que representan un consumo de recursos. q_1 es la producción del bien en la localidad 1 que se consume en la misma localidad; q_2 es la producción del bien en la localidad 2 que se consume en la misma localidad y q_{21} es la producción del bien en la localidad 2 que se exporta y consume en la localidad 1. C_1 y C_2 representan las funciones de costo de producción en cada localidad y t es el costo de transporte, constante. En el modelo planteado, q_{21} depende de *t*; en otras palabras, al cambiar el costo unitario de transporte, no solo cambia el costo de transporte sino también la cantidad a exportar del bien q desde la zona 2.

$$\frac{\partial BS}{\partial q_1} = p_1\left(q_1+q_{21}\right) - C_1'\left(q_1\right) = 0$$

$$\frac{\partial BS}{\partial q_{21}} = p_1\left(q_1+q_{21}\right) - C_2'\left(q\right) - t = 0 \Rightarrow C_1'\left(q_1\right) = C_2'\left(q_2+q_{21}\right) + t$$

$$\frac{\partial BS}{\partial q_2} = p_2\left(q_2\right) - C_2^{'}\left(q_2 + q_{21}\right) = 0$$

Dos resultados destacan. En primer lugar, el costo de transporte vincula los precios de ambos mercados. Si este costo fuera infinito la segunda ecuación se convertiría en una desigualdad y no habría exportaciones desde la zona 1 a la zona 2 y los precios en ambas zonas dependerían solo de la demanda y producción locales.

En segundo lugar, bajo condiciones de competencia perfecta, las tres condiciones de primer orden representan también un equilibrio de mercado (mercado del bien en localidades 1 y 2 y mercado de transporte).

Calculemos el cambio en el beneficio social si disminuye el costo de transporte. Para ello derivamos BS con respecto a t:

$$\frac{\partial BS}{\partial t} = p_1\frac{dq_1}{dt} + p_1\frac{dq_{21}}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} - C_1^{'}\left(q_1\right)\frac{dq_1}{dt} - C_2^{'}\left(q_2 + q_{21}\right)\frac{dq_2}{dt} - C_2^{'}\left(q_2 + q_{21}\right)\frac{dq_{21}}{dt} - \frac{dq_{21}}{dt}t - q_{21}$$

Agrupando términos a fin de hacer uso de las condiciones de primer orden, la ecuación anterior resulta:

$$\frac{\partial BS}{\partial t} = \underbrace{\left(p_1 - C_1^{'}\left(q_1\right)\right)}_{=0}\frac{dq_1}{dt} + \underbrace{\left(p_1 - C_2^{'}\left(q_2 + q_{21}\right) - t\right)}_{=0}\frac{dq_{21}}{dt} + \underbrace{\left(p_2 - C_2^{'}\left(q_2 + q_{21}\right)\right)}_{=0}\frac{dq_2}{dt} - q_{21}$$

$$\frac{\partial BS}{\partial t} = -q_{21}$$

Si el cambio en el precio de transporte es no marginal, entonces resulta la siguiente ecuación, que nos dice que el beneficio social está dado por el área bajo la curva de demanda de transporte, que en este ejemplo, es la curva de demanda por importaciones en el mercado 1:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial BS\left(t\right)}{\partial t}dt = -\int_{t_0}^{t_1} q_{21}\left(t\right)dt$$

Respuesta Ejercicio 4:

Considerando a = impuesto ambiental unitario tal que $m + a < P_A^0 - P_B^0$, permitiendo intercambio:

$\Delta BS_{total} = \Delta BS_A + \Delta BS_A$,

