Sexta Lista de Ejercicios – ICT 3103
Congestión Dinámica

Ejercicio 1 Modelo de cuello de botella

En el modelo de cuello de botella, obtenga las ecuaciones para determinar:

i) El inicio de la hora punta y el fin de la hora punta.
ii) El costo marginal de un usuario adicional si no hay tarificación
iii) La tarifa dinámica
iv) El costo marginal de un usuario adicional con tarificación

Respuesta 1:

i) El inicio de la hora punta y el fin de la hora punta se consigue al considerar que el costo en equilibrio es igual a todos y que el tiempo de cogestión será determinado por la cantidad de personas que viajan N y la tasa del cuello de botella ω

$$\beta(t^* - t_e) = \gamma(t_l - t^*)$$
$$(t_l - t_e) = \frac{N}{\omega}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$

$$t_l = t^* + \frac{\beta}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$

ii) Si no hay tarificación, el costo que percibe cada individuo será

$$\beta(t^* - t_e) = \frac{\beta\gamma}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$

Luego,

$$C^{eu} = \beta(t^* - t_e) = \frac{\beta\gamma}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega}$$
$$C_{mg} = C^{eu} + N\frac{\partial C^{eu}}{\partial N} = 2C^{eu}$$

iii) La tarifa dinámica será cobrada de forma a sustituir el costo de congestión,

Si el individuo llega a la hora t, antes de la hora deseada t^* pagará la tarifa τ que será definida por,

$$\tau(t) = \beta(t - t_e)$$

Si t es posterior a t^* pagará la tarifa τ que será definida por,

$$\tau(t) = \gamma(t_l - t)$$

iv) Con tarificación el costo medio del usuario será igual a la mitad del costo medio anterior,

$$Cme = \frac{\beta\gamma}{2(\gamma + \beta)}\frac{N}{\omega}$$

Y el costo marginal,

$$Cmg = \frac{\beta\gamma}{(\gamma + \beta)}\frac{N}{\omega}$$

Ejercicio 2 Modelo de cuello de botella

En el modelo de cuello de botella, qué ocurre si el costo de llegar tarde tiende a infinito:

i) Calcule el inicio de la hora punta y el fin de la hora punta.
ii) Haga el gráfico donde muestre como se arma la cola de espera en función el tiempo.
iii) Explique en palabras los resultados obtenidos

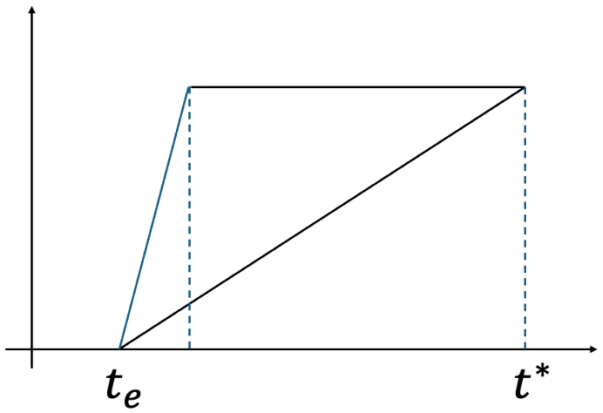
Respuesta 2:

i) Si $\gamma \to \infty$ entonces,

$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^* - \frac{N}{\omega}$$

$$t_l = t^* + \frac{\beta}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^*$$

ii) El gráfico debe mostrar que nadie llega después de la hora deseada t^* y que la cola crece hasta que el tiempo máximo en la cola sea justo el tiempo restante para t^*.



iii) Si el costo de llegar tarde tiende a infinito nadie querrá llegar después de la hora deseada. El que llega a la hora deseada percibe el mayor costo de congestión. El horario de inicio de la cola solo depende de cuantas personas viajan y la tasa del cuello de botella, ya que no existe más un *trade off* entre llegar tarde o temprano, todos llegan temprano.

Ejercicio 3 Modelo de cuello de botella

En el modelo de cuello de botella, qué ocurre si $\alpha = \beta = \gamma$.

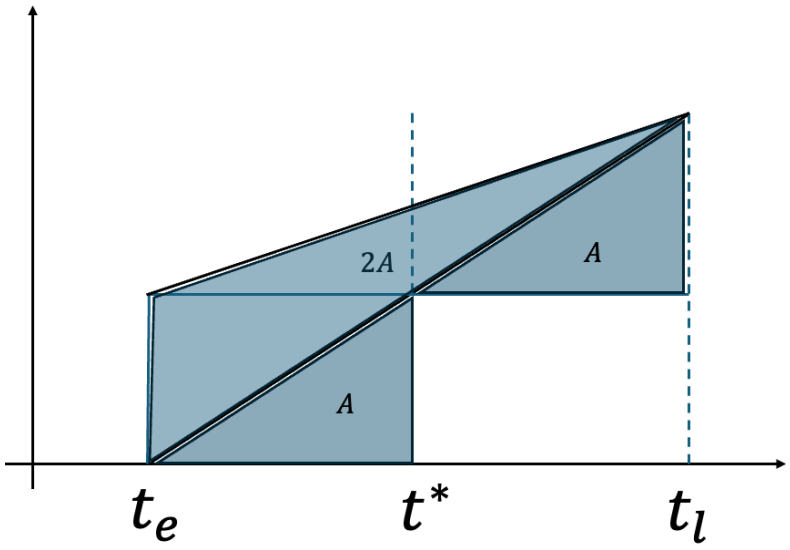
i) Calcule el inicio de la hora punta y el fin de la hora punta.
ii) Haga el gráfico donde muestre como se arma la cola de espera en función el tiempo.
iii) Explique en palabras los resultados obtenidos.
iv) ¿Qué caso cree Ud. que es más probable en la vida real: este o el visto en el ejercicio anterior?

Respuesta 3:

i)

$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^* - \frac{1}{2}\frac{N}{\omega}$$
$$t_e = t^* - \frac{\gamma}{\gamma+\beta}\frac{N}{\omega} = t^* + \frac{1}{2}\frac{N}{\omega}$$

ii) El gráfico debe demostrar que las áreas de los triángulos son iguales.



iii) Mitad de las personas llegará adelantado y la mitad atrasado, no hay diferencia entre el tiempo de llegar adelantado, atrasado o estar en la cola.
iv) El ejemplo anterior con mayor penalización para llegar atrasado.

Ejercicio 4 Diferencias entre modelos

Explique qué diferencia, en cuanto a la modelación de la congestión, a los modelos estático y cuello de botella.

Respuesta 4:

Mencionar las diferencias de los supuestos de modelación (congestión dinámica asumen demanda inelástica), la tarifa (estática versus dinámica) y la forma con que reducen la congestión (reducción de usuarios viajando versus reordenamiento de llegadas).

Ejercicio 5

Considere la función de demanda inversa P = 18 – 0,01 Q. Suponga que el costo por unidad de infraestructura es $50. Considere las preferencias alfa = beta = gamma = 1.

i) Determine la demanda y provisión de infraestructura óptima social. Calcule la recaudación y el costo total de todos los usuarios.

ii) En base a los resultados obtenidos en el punto i) para la demanda y la provisión de infraestructura, determine el equilibrio de usuario sin tarificación vial.

Respuesta 5:

i) Para calcular la demanda y la inversión óptimas se debe plantear la función de beneficio social

$$BS = \int_0^Q (18 - 0{,}01x)dx \; - NC^u - C_\omega \omega$$

El costo del usuario en tarificación vial es dado por la expresión:

$$C^u = \frac{\gamma\beta}{\gamma + \beta}\frac{N}{\omega} = \frac{N}{2\omega}$$

Las condiciones de primer orden serán:

$$\frac{\partial Bs}{\partial N} = \; (18 - 0{,}01N) - \frac{N}{4\omega} - \frac{N}{4\omega} = 0 \; \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{N}{\omega} + 0{,}01N = 18$$

$$\frac{\partial Bs}{\partial \omega} = -N\left(-\frac{N}{4\omega^2}\right) - 50 = 0 \Rightarrow \left(\frac{N}{\omega}\right)^2 = 200 \Rightarrow \frac{N}{\omega} = \sqrt{200}$$

Resolviendo,

$$0{,}5\sqrt{200} + 0{,}01N = 18 \Rightarrow N = 1092$$
$$\omega = 77{,}21$$

El costo total del usuario es $P(1092) = 18 - 0{,}01 \cdot 1092 = 7{,}08 = \frac{N}{2\omega}$, la mitad de este costo (costo percibido o costo medio) es tiempo por llegar fuera de término y la otra mitad es la tarifa vial.

La recaudación total *R* será igual a N por tarifa. La tarifa es 1/2 N/ω = $3,535, la mitad del costo del usuario. Así *R* está dada por

$$R = \frac{1}{2}\frac{N}{\omega}N = 3860$$

El costo total de la infraestructura es 50 ω = 3864. Se cumple el teorema de Mohring-Harwitz.

ii) Si no hay tarificación vial, para una demanda de 1092 vehículos y una infraestructura igual a 77,3 unidades de atención por unidad de tiempo, la hora de inicio y hora de término se mantienen, pero habrá colas en el servidor. Dado que alfa = beta = gamma = 1, estas colas harán perder a los usuarios una cantidad de tiempo cuyo valor es igual al costo del tiempo por llegada tarde. En otras palabras, al eliminar la tarificación vial, el tiempo en cola total es igual al tiempo por llegada a destiempo total. El gráfico correspondiente es similar al del ejercicio 3.