Cuarta Lista de Ejercicios – ICT 3103
Tarificación Vial – Inversión en Infraestructura

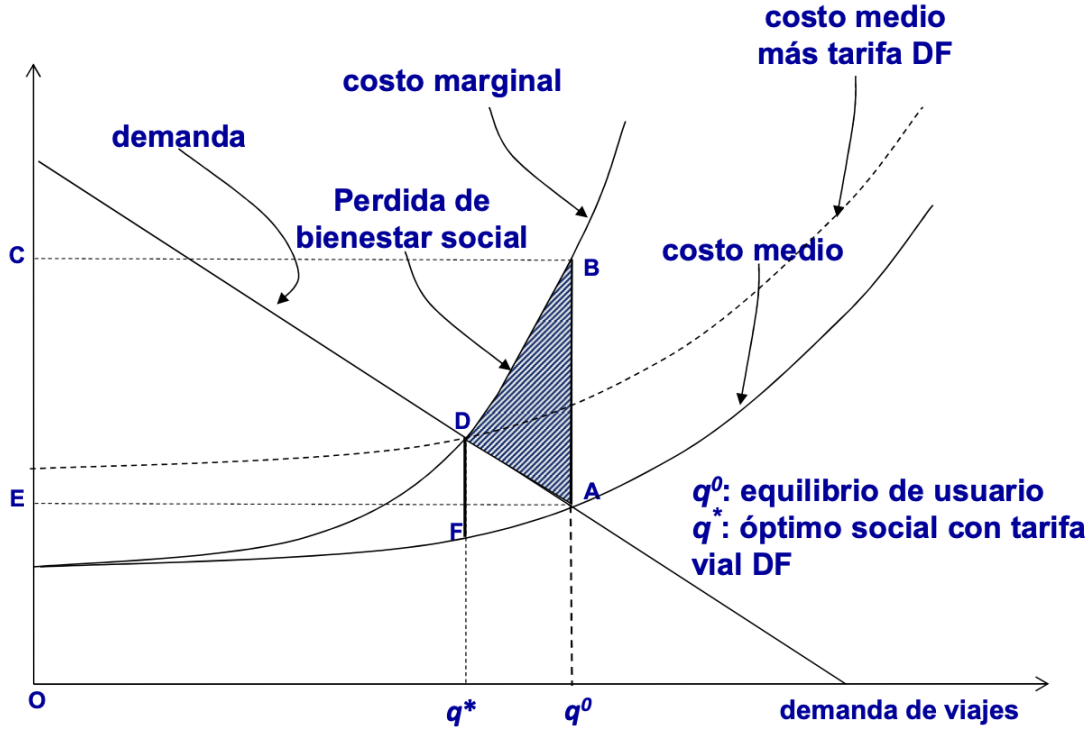
Ejercicio 1 Gráfico de equilibrio de vía congestionada

Considere una vía congestionada con curva de demanda inversa (d(q)) y una curva de costo medio igual a c(q), donde q es la cantidad de usuarios. Grafique:

i) el equilibrio en la sin tarificación:
ii) el equilibrio considerando el óptimo social
iii) la tarifa necesaria para el óptimo social
iv) la pérdida del bienestar social

Respuesta 1:

i) punto A
ii) punto D
iii) recta DF
iv) área entre puntos ABD



Ejercicio 2 Teorema de Mohring-Harwitz

Explique el teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem). Para ello debe explicar cada una de las tres condiciones del mismo y a qué resultado se arriba si se cumplen estas tres condiciones. (No basta con mencionar las tres condiciones: si alguna de las tres condiciones no está bien explicada, el ejercicio está mal resuelto.)

Respuesta 2:

El teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem) discute sobre la condiciones para que la tarifa de primer mejor cobrada al usuario permite recuperar exactamente el costo de la inversión en infraestructura. Para que el teorema se cumpla, las tres condiciones son: (1) que la función de costo generalizado $C_t(q,k)$ sea homogénea de grado 0, que permite aplicar la ecuación de Euler para funciones homogéneas de grado 0 y relacionar la recaudación con la derivada parcial del costo por la capacidad. La condición número (2) es la de considerar que la capacidad de la infraestructura es perfectamente divisible, lo que significa que k puede asumir cualquier valor positivo, eso implica la existencia de $\frac{\partial Ct}{\partial k}$. Por último, la tercera condición de que existan economías de escala constantes en la construcción de vialidad implica que el grado de economías de escala s sea igual a 1, igualando la recaudación total con el costo de provisión de más capacidad.

Ejercicio 3 Teorema de Mohring-Harwitz

Suponga que al resolver el problema de máximo bienestar social (sin considerar ningún tipo de restricción de presupuesto) la recaudación vial resulta ser mayor (menor) al monto de la inversión en infraestructura vial. ¿Qué supuesto del teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem) no se está cumpliendo? Explique

Respuesta 3:

Si la recaudación vial es mayor o menor al monto de inversión en la infraestructura, no se está cumpliendo el supuesto del teorema de Mohring-Harwitz de que existan economías de escala en la construcción de vialidad, ya que de ser el caso, el monto de inversión en infraestructura es igual a la recaudación vial.

Ejercicio 4

Demuestre matemáticamente el teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem). Para ello verifique T * q = C (T: tarifa vial; q: demanda; C: costo total de la infraestructura).

Respuesta 4:

Considerando una vía con curva de costo generalizado igual a $C(q,k)$ donde q es el número de usuarios, k es la capacidad de la vía que está congestionada y sujeta a una tarificación por congestión que optimiza el beneficio social. Y que $\rho(k)$ es el costo de capital que representa la magnitud de la inversión en infraestructura y el costo de oportunidad del capital.

Si se cumple el teorema de Mohring-Harwitz, el total recaudado por la tarifa, representado por $T \cdot q$ debe ser igual al costo total de inversión en infraestructura.

Sea la siguiente función de bienestar social, que se desea maximizar:

$$BS = \int_0^q p(x)dx - qC(q,k) - \rho(k)$$

La condición de primer orden en relación a [q] entrega la expresión de equilibrio en el óptimo social, considerando $q\frac{\partial C}{\partial q}$ como la tarifa cobrada.

$$\frac{\partial BS}{\partial q} = p(q) - C(q,k) - q\frac{\partial C}{\partial q} = 0$$

$$p(q) = C(q,k) + q\frac{\partial C}{\partial q}$$

La recaudación por la tanto, será igual a:

$$T \cdot q = q\frac{\partial C}{\partial q} \cdot q$$

Si realizamos la condición de primer orden en relación a la capacidad de la vía [k], tenemos la expresión que representa que la infraestructura se expande hasta que su costo marginal se iguale a los beneficios por descongestión:

$$\frac{\partial BS}{\partial k} = -q\frac{\partial C}{\partial k} - \frac{\partial \rho}{\partial k} = 0$$

$$-q\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{\partial \rho}{\partial k}$$

Se permite la expresión por considerar que la capacidad de la vía es continua y puede asumir cualquier valor positivo, una de las condiciones del teorema.

Considerando que la función de costo es homogénea y de grado 0, podemos escribir la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial C}{\partial k}k + \frac{\partial C}{\partial q}q = 0$$

Luego, podemos escribir la recaudación total como:

$$T \cdot q = q\frac{\partial C}{\partial q} \cdot q = -q\frac{\partial C}{\partial k}k$$

Según la expresión obtenida en [k],

$$T \cdot q = -q\frac{\partial C}{\partial k}k = -q\frac{\partial C}{\partial k}k = \frac{\partial \rho}{\partial k}k = \frac{\rho}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial k}k = \rho\frac{1}{s}$$

Donde s es el grado de economía de escala en la construcción de infraestructura vial,

Si queremos que se cumpla el autofinanciamiento, entonces:

$$T \cdot q = \rho\frac{1}{s} = \rho$$

Luego, s=1, o sea que deben existir economías de escala constantes en la construcción de vialidad, tercera condición del teorema.

Ejercicio 5 Tarifa vial

Considere las funciones de demanda inversa lineal de viajes para hora punta y hora fuera de punta $P_p(Q_p) = A_p - B_p Q_p$ y $P_f(Q_f) = A_f - B_f Q_f$ respectivamente. La función de costo medio de viaje está dada por $\alpha \left(\frac{Q}{K}\right)^2$, donde Q depende del valor correspondiente a la hora del día. El costo de la infraestructura está dado por τK.

Suponga los siguientes valores A_p = 1600, B_p = -1,5, A_f = 800, Bf = -1, τ = 51,8, alfa = 150 y K = 2000. Suponga también que el valor del tiempo es igual a 1 (uno).

i) Calcule la tarifa vial para la hora punta y para la hora fuera de punta.
ii) Verifique que se cumple el resultado señalado en el teorema de Mohring-Harwitz (recaudación igual a gasto de capital en vialidad).

Respuesta 5:

i) Consideramos la función de beneficio social:

$$BS = \int_0^{Q_p} (A_p - B_p x)dx - \alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 Q_p + \int_0^{Q_f} (A_f - B_f x)dx - \alpha \left(\frac{Q_f}{K}\right)^2 - \tau K$$

La tarifa óptima será determinada por las condiciones de primer orden del número de usuarios en hora punta y fuera de punta, entonces:

$[Q_p]: (A_p - B_p Q_p) - \alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 - 2\alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 = 0$, sustituyendo los valores y solucionando la ecuación se encuentra que $Q_p = 992{,}75$. Luego, se debe aplicar en la expresión de la tarifa, $T = 2\alpha \left(\frac{Q_p}{K}\right)^2 = 73{,}9$. Para considerar la tarifa óptima en hora punta.

Análogamente,

$[Q_f]: (A_f - B_f Q_f) - \alpha \left(\frac{Q_f}{K}\right)^2 - 2\alpha \left(\frac{Q_f}{K}\right)^2 = 0$, y $Q_f = 738{,}62$ y la tarifa óptima será igual a 40,9.

ii) La recaudación total será igual:

$$Q_f \cdot T_f + Q_p \cdot T_p = 103.573{,}783$$

El costo de provisión de infraestructura, será igual a $\tau K = 103.600$, se puede decir que se cumple el teorema del financiamiento.

Ejercicio 6 Función homogénea de grado 0

Que implica considerar que la función de costo $C_t(q_t, k)$ es homogénea de grado 0. Considere una función de costo del tipo $C_t(q_t, k) = \alpha(\frac{q_t}{k})^3$. ¿Es función es homogénea de grado 0?

Respuesta 6:

Una función $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ es homogénea de grado n, cuando al multiplicar todas sus variables independientes por una constante t, se cumple que:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_k) = t^n f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Cuando una función es homogénea de grado n, se aplica la ecuación de Euler,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Luego, considerando $C_t(q_t, k) = \alpha(\frac{q_t}{k})^3$, para cualquier valor de t , $\alpha(\frac{tq_t}{tk})^3 = \alpha(\frac{q_t}{k})^3$, luego n = 0. Siendo una función homogénea de grado 0.

Ejercicio 7 Tarificación Vial

Suponga que se establece tarificación vial en una ciudad (usando la tarificación óptima estática vista en clases), bajo los supuestos del teorema de Mohring-Harwitz (cost-recovery theorem): homogeneidad de grado cero de la función de costos medios de viaje, divisibilidad de la infraestructura y economías de escala constantes en la construcción de la infraestructura.

Suponga que la recaudación por tarificación vial es mayor que el costo de proveer la infraestructura, incluyendo el costo de oportunidad del capital. Explique qué implicancia tiene ello desde el punto de vista de la posible subinversión o sobreinversión en capacidad vial.

Respuesta 7:

Si la recaudación es mayor que el costo de proveer infraestructura, y se cumple la condición de que existen retornos constantes a escala (grado de economía de escala = 1), entonces existe una subinversión en capacidad vial.

Ejercicio 8 Tarificación Vial

Considere la función de demanda inversa p(q) para un viaje entre un par OD. Suponga la existencia de dos rutas que permiten realizar el viaje, cada una de ellas con costo medio percibido ci(qi, ki) (i = 1, 2) (q = q1 + q2; q: demanda total, qi: demanda ruta i; ki: capacidad vial ruta i). El costo de la infraestructura para cada ruta está dado por la función ρ(ki) (i = 1, 2).

i) Plantee el problema de máximo bienestar social:

a) Derive la condición de primer orden con respecto a qi (i = 1, 2).

b) Deduzca la ecuación que establece la tarifa vial igual al costo marginal social de congestión.

c) Derive la condición de primer orden con respecto a ki (i = 1, 2) y determine la regla de inversión óptima.

ii) Suponga que solo se puede tarificar la Ruta 1. Ello implica colocar la siguiente restricción en el problema de maximización de bienestar social , cuyo significado es que el costo de viajar ha de ser igual al costo medio percibido de viaje en la Ruta 2.

a) Determine la tarifa óptima segunda mejor a cobrar en la Ruta 1. Para ello derive la función de bienestar social con restricción con respecto a q1 y q2, despeje el valor del multiplicador de Lagrange en la condición de primer orden correspondiente a q2 y reemplace en la condición de primer orden correspondiente a q1.

b) Demuestre que si la demanda es infinitamente elástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es la que corresponde a la solución primera mejor.

c) Demuestre que si la demanda es infinitamente inelástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es igual a la diferencia de la externalidad de congestión entre la Ruta 1 y la Ruta 2. Explique en qué caso esta tarifa sería un subsidio.

d) por último deduzca la regla de inversión óptima para cada ruta.

Respuesta 7: Ver clase 2_1_1

Ejercicio 9 Viajes par OD

Considere la función de demanda inversa lineal de viajes entre un par OD: p(q) =A - B q. Se puede viajar por dos rutas, tal que q = q1 + q2. Las funciones de costo medio percibido para la Ruta 1 y la Ruta 2 son respectivamente CMe1 = a1 + b1 q1 y CMe2 = a2 + b2 q2.

i) Obtenga la demanda óptima social.
ii) Obtenga la demanda de equilibrio de usuario bajo el supuesto que no existe tarificación vial.
iii) Demuestre que con tarificación vial, la solución de equilibrio de usuario es un óptimo social.
iv) Resuelva los puntos i) y ii) suponiendo A = 160; B = 0,5; a1 = 50, b1 = 0,5, a2 = 10 y b2 = 1. Verifique que la solución en i) genera un mayor bienestar social ($ 6.786) que en ii) ($ 5.476).

Respuesta 9:

i) Deben escribir la función de beneficio social:

$$BS = \int_0^{q_1+q_2} p(x)dx \; - \; q_1 c_1 - \; q_2 c_2$$

Por las condiciones de primer orden:

$$[q_1]: A - B(q_1 + q_2) - c_1 - q_1 \frac{\partial c_1}{\partial q_1} = 0$$
$$[q_2]: A - B(q_1 + q_2) - c_2 - q_1 \frac{\partial c_2}{\partial q_2} = 0$$

Solucionando el sistema de ecuaciones, se encuentra que la demanda óptima es:

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + b_1 b_2}$$

ii) Si no hay tarificación vial, el equilibrio se da con el costo medio, el sistema de ecuaciones será igual a:

$$[q_1]: A - B(q_1 + q_2) - c_1 = 0$$
$$[q_2]: A - B(q_1 + q_2) - c_2 = 0$$

Solucionando el sistema de ecuaciones, se encuentra que la demanda óptima es:

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + 2 b_1 b_2}$$

iii) Si existe tarificación vial de forma que,

$$T_1 = q_1 \frac{\partial c_1}{\partial q_1} \; y \; T_2 = q_2 \frac{\partial c_2}{\partial q_2}$$

Entonces, el equilibrio de usuarios se iguala al sistema de ecuaciones propuesto en 1. Lugo el equilibrio de usuarios en tarificación es igual al óptimo social.

iv) Sustituyendo los valores se encuentra que en i;

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + 2 b_1 b_2} = \; 105{,}71$$

Y por las condiciones de equilibrio,

$$A - B(q_1 + q_2) - a_1 - 2 q_1 b_1 = 0$$
$$A - B(q_1 + q_2) - a_2 - 2 q_2 b_2 = 0$$

$$q_1 = 57{,}15$$
$$q_2 = 48{,}56$$

Luego, el beneficio social será igual a,

$$BS = \int_0^{105{,}71} (160 - 0{,}5x)dx \; - \; 57{,}15 \cdot (50 + 0{,}5 \cdot 57{,}15) - 48{,}56 \, (10 + 1 \cdot 48{,}56) = \$6786$$

Sustituyendo los valores se encuentra que en ii;

$$(q_1 + q_2) = \frac{A(b_1 + b_2) - a_1 b_2 - a_2 b_1}{B b_2 + B b_1 + b_1 b_2} = \; 148$$

Y por las condiciones de equilibrio,

$$A - B(q_1 + q_2) - a_1 - q_1 b_1 = 0$$
$$A - B(q_1 + q_2) - a_2 - q_2 b_2 = 0$$

$$q_1 = 72$$
$$q_2 = 76$$

Luego, el beneficio social será igual a,

$$BS = \int_0^{148} (160 - 0{,}5x)dx \; - \; 72 \cdot (50 + 0{,}5 \cdot 72) - 76\,(10 + 1 \cdot 76) = \$5476$$

Luego, luego de la tarificación vial, el beneficio social aumenta.

Ejercicio 10 Política de Impuestos

Sobre políticas de impuestos, responda los siguientes ítems:

i) Explique la relevancia del impuesto a los combustibles a nivel nacional.
ii) Explique por qué el impuesto a los combustibles se trata del principal pago que realizan los automovilistas en relación al uso del vehículo.
iii) ¿Las agencias nacionales dedicadas a la construcción y mantenimiento de infraestructura vial están sujetas a disciplina de mercado?
iv) Describa cuáles son las dos agencias gubernamentales más relevantes a nivel nacional en la provisión y mantenimiento de la infraestructura vial.
v) ¿Por qué se dice que existe amplio margen para dar mayor racionalidad a la inversión y mantenimiento de la infraestructura vial?
vi) Compara la vialidad urbana con la vialidad interurbana, ¿en cuál de estos dos ámbitos existiría una mejor asignación de recursos?
vii) ¿cuál es el principal pago que realizan los automovilistas por el uso del vehículo?
viii) ¿Es el permiso de circulación un cobro al uso de la vialidad? ¿Es el impuesto al NOX un cobro al uso de la vialidad?
ix) ¿Cómo se financian las autopistas urbanas? ¿opera la disciplina de mercado en estos casos?
x) en base a la materia vista en clase, explique las siguientes dos aseveraciones: ¿existe sobreinversión vial?; ¿las automovilistas no pagan el costo marginal de la congestión?

Respuesta 10:

i) El impuesto a los combustibles es el principal impuesto relacionado al uso del automóvil y es relevante nacionalmente ya que fue concebido para la recuperación de la vialidad luego del terremoto de 1985. El impuesto es el único en función del uso del vehículo, lo que en un primer momento podría relacionarse con costos sociales externos al uso del automóvil. Sin embargo, la magnitud del impuesto, de cerca de $40 pesos/km es inferior a estimaciones del costo de externalidades por

kilómetro recorrido. Por ejemplo, solo la externalidad de congestión fue calculada por Rizzi y de la Mazza (2017) en $317 en hora punta y $67 en hora valle para Santiago. Ambos superiores al monto asociado al impuesto de combustibles. En resumen, si bien es el impuesto principal asociado al uso, no cubre la totalidad de los costos de inversión en vialidad y los costos de las externalidades del uso del automóvil.

ii) El impuesto a los combustibles es el principal pago por el uso del vehículo porque está asociado a la distancia recorrida. Cuanto más usan el automóvil, más los usuarios consumen combustible, y por lo tanto, más pagan de impuesto en total. El permiso de circulación independe del kilometraje recorrido.

iii) No, las agencias no están sujetas a disciplinas de mercado ya que toman decisiones en bases a criterios administrativos, políticos y de evaluación social de proyectos.

iv) El Ministerio de Vivienda y Urbanismo, por la Dirección General de Obras Urbanas, está a cargo de obras de pavimentación urbana, mientras que el Ministerio de Obras Públicas, se encarga de la construcción, conservación y mejoramiento de caminos, puentes, cruces desnivelados, túneles y pasarelas.

v) Se dice que existe amplio margen para dar mayor racionalidad a la inversión y mantenimiento de la infraestructura vial porque probablemente haya sobreinversión en vialidad y en el uso del automóvil, ya que los costos de las externalidad no son traspasados a los usuarios. El costo marginal de la infraestructura vial supera sus beneficios marginales, al igual que el costo marginal por el uso del vehículo privado supera su beneficio marginal.

vi) La vialidad urbana generalmente no está sujeta a inversiones por medio de concesiones y suele ser financiada a través de inversión del estado. Mientras que en la vialidad interurbana, en algunos casos, está concesionada, recuperando la inversión a través del cobro de peaje, por lo que los recursos asignados a la viabilidad interurbana estarían mejor asignados.

vii) El principal pago que realizan los automovilistas por el uso del vehículo es el impuesto de combustibles, ya que este es proporcional a la distancia recorrida en automóvil

viii) No, ya que el cobro no se hace en función del uso, si no que en función de la antigüedad y del tipo del vehículo, independiente de la distancia total que este recorre en las vías.

ix) Las autopistas son financiadas de modo que el cobro de peaje recupere la inversión privada, sumada a un margen de ganancias. Por lo tanto, el cobro de peaje no tiene relación al cobro de externalidades del vehículo, como la congestión, no siguiendo la lógica microeconómica para la determinación de las tarifas. Además, las empresas licitadas tienen tarifa y alzas previstas por contrato, y no pueden realizar un cambio tarifario en función de la dinámica del mercado.

x) Existe una sobreinversión vial, ya que el costo percibido por los usuarios no refleja las externalidades como congestión, accidentes y emisiones, por ejemplo. Por lo que

el costo marginal de la infraestructura vial superaría su beneficio marginal. Los automovilistas no pagan su costo marginal de la congestión, aun cuando existan peajes en las autopistas, estos son concebidos para recuperar la inversión en la infraestructura y no necesariamente se acercan a la tarifa de congestión óptima.