26 de septiembre de 2025

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO INGENIERIA DE TRANSPORTE Y LOGISTICA
ICT3103 ECONOMIA DE TRANSPORTE - 2º SEMESTRE 2025
INTERROGACION 1

Dispone de *una hora y treinta minutos* para responder la interrogación. En paréntesis figura el puntaje de cada pregunta. i) Sus respuestas tienen que ser autocontenidas, nada se dará por sobrentendido al corregir; ii) cuando dice explicar, debe proveer un argumento que justifique de manera adecuada su respuesta haciendo uso de los contenidos aprendidos en el curso; iii) en los desarrollos matemáticos, debe explicarse la notación utilizada. Ídem si hace gráficos.

1) **Función de utilidad indirecta en modelos de elección discreta.** Considere un modelo de maximización de la utilidad que contiene una elección discreta. El problema de maximización condicionado en la alternativa *m* es
$\text{Max}_x\ U(x, q_m)$, sujeto a $p_x\ x = I - c_m$.
x: bienes de consumo; p: precio de los bienes de consumo; I: ingreso fijo; q_m: atributos hedónicos del bien discreto m y c_m su costo.

   Explique en palabras cuáles son los argumentos de la función de utilidad indirecta condicionada en la alternativa *m* y por qué. Escriba la función y sus argumentos. (10% de la nota)

   Respuesta:
   La función de utilidad indirecta condicionada en la alternativa m tiene como argumentos todas aquellas variables que son exógenas para el consumidor; es decir, aquellas variables sobre las que el consumidor no puede optimizar: los precios de los bienes continuos x, su ingreso fijo, el costo de la alternativa m y sus atributos hedónicos q_m. Así, se tiene $V_m = V(p_x, I - c_m, q_m)$.

2) **Modelo de Train y McFadden.** Considere un modelo en el que el tiempo de viaje y el tiempo dedicado a trabajar no forman parte de la función de utilidad. En este modelo, el consumidor elige cuánto tiempo dedicar al ocio y al trabajo, siendo el tiempo de viaje fijo. (20% de la nota)

$$Max_{\{t_w\}}: U_i = U(X, T_o)$$
$$s.a$$
$$X = I + wt_w - c$$
$$T_o = T - t_w - tv$$

   X: gasto en consumo; T_o: tiempo de ocio; I: ingreso fijo exógeno; w: tasa salarial; t_w: horas de trabajo; T: tiempo total; c: costo de viaje; tv: tiempo de viaje.

   i) Determine el valor del tiempo de ocio. Explique el resultado obtenido. ii) Determine el valor subjetivo del ahorro de tiempo de viaje. Explique el resultado obtenido.

Respuesta: i) Reemplazando las dos restricciones (X y T_o) en la función de utilidad directa se obtiene

U(I + w * tw – c; T x– tw – Tv)

Procediendo a derivar con respecto al tiempo de trabajo tw e igualando a cero, se obtiene la condición de primer orden. Operando sobre la condición de primer orden se obtiene el siguiente resultado:

$\frac{\partial U}{\partial X} w = \frac{\partial U}{\partial T_o} \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial U}{\partial T_o}}{\frac{\partial U}{\partial I}} = w$; tener presente que $\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial I}$

El valor del tiempo de ocio es igual a la tasa salarial *w*. Dado que la utilidad no depende del tiempo de trabajo, el costo de oportunidad de una hora más de ocio es una hora menos de trabajo y, por lo tanto, una hora menos de ingreso monetario. (Compare con el modelo visto en clase.)

ii) Se diferencia totalmente la función de utilidad con respecto al ingreso y al tiempo de viaje y se iguala a cero:

$\frac{\partial U}{\partial I} dI + \frac{\partial U}{\partial tv} dtv = 0$. Manipulando algebraicamente se obtiene: $\frac{dI}{dtv} = w$.

El valor subjetivo del ahorro de tiempo de viaje es igual a la tasa salarial w: el tiempo de viaje ahorrado se dedica a ocio o a trabajar, cuyos beneficios son iguales. Este resultado es consecuencia de que la función de utilidad no incorpora como argumentos el tiempo de viaje ni el tiempo dedicado al trabajo.

3) Asignación de tiempo a actividades. Considere la siguiente función de utilidad:
U (X, T_{tr}, $T_v + T_e$, T_{o1}, T_{o2}, T_d)

sujeto a $X = T_{tr}\, s + I - c_v$
$T_{tr} + T_v + T_e + T_{o1} + T_{o2} + T_d = 24$
$T_d \geq \overline{T_d}$

Notación: X: bienes generalizados *(variable de decisión)*; su precio es igual a 1; I: Ingreso fijo; s: ingreso por horas de trabajo
T_{tr}: tiempo de trabajo *(variable de decisión)*
T_v: tiempo de viaje en vehículo al trabajo; este tiempo es fijo.
T_e: tiempo de espera para realizar el viaje al trabajo; este tiempo es fijo. En la función de utilidad, la suma de estos dos términos genera la desutilidad asociada a viajar; tenga esto presente.
T_{o1}: tiempo dedicado a la actividad de ocio 1 (por ejemplo, tiempo para estar con la familia, amigos, etc.) *(variable de decisión)*. Se supone que no se debe viajar para realizar esta actividad.
T_{o2}: tiempo dedicado a la actividad de ocio 2 (por ejemplo, tiempo para ir al cine, teatro, espectáculo deportivo, etc.) *(variable de decisión)*. Se supone que no se debe viajar para realizar esta actividad.
T_d: tiempo dedicado a actividades domésticas *(variable de decisión)*. $\overline{T_d}$ es el tiempo mínimo que se puede dedicar a la actividad para cumplir con estas labores. Suponga que las labores domésticas generan desutilidad y que no pueden ser evitadas. Se supone que no se debe viajar para realizar esta actividad.
c_v: costo de viaje

La primera restricción es presupuestaria; la segunda es de tiempos y la tercera nos indica que $\overline{T_d}$ es el tiempo mínimo necesario para cumplir con labores domésticas. (30% de la nota)

i) Plantee el Lagrangeano que da lugar al problema de maximización de la utilidad del consumidor. (0,1)
ii) Obtenga las cinco condiciones de primer orden. (0,2)
iii) Explique las condiciones de primer orden con relación a T_{tr}, T_{o1} y T_{o2}. (0,2)
iv) A partir de la respectiva condición de primer orden, obtenga la ecuación que determina la disposición al pago del consumidor por tecnologías que permitan reducir el tiempo dedicado a labores domésticas. Explique. (0,15)
v) Entregue las ecuaciones que determinan la disposición al pago por ahorrar tiempo de viaje y ahorrar tiempo de espera. Explique si ambos valores difieren o son iguales. (0,20)
vi) Explique cómo debería modificarse la condición de primer orden con respecto a las actividades domésticas para que esta sea considerada una tercera actividad de ocio. (0,15)

Respuesta:

i) $$\text{Max}_{X,\,T_{tr},T_{o1},\,T_{o2},\,T_d}\; U\left(X,\,T_{tr},T_v+\,T_e,\,T_{o1},\,T_{o2},\,T_d\right)+\lambda\left(sT_{tr}+I-c_v-X\right)+$$
$$+\mu\left(24-T_{tr}-T_v-T_e-\,T_{o1}-\,T_{o2}-\,T_d\right)+\tau\left(T_d-\overline{T_d}\right)$$

ii) $$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial U}{\partial X}-\lambda=0\Leftrightarrow\frac{\partial U}{\partial X}=\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_{tr}}=\frac{\partial U}{\partial T_{tr}}+\lambda s-\mu=0\Leftrightarrow\frac{\partial U}{\partial T_{tr}}+\lambda s=\mu\Leftrightarrow\frac{\partial U}{\partial T_{tr}}=-\lambda s+\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_{O1}}=\frac{\partial U}{\partial T_{O1}}-\mu=0\Leftrightarrow\frac{\partial U}{\partial T_{O1}}=\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_{O2}}=\frac{\partial U}{\partial T_{O2}}-\mu=0\Leftrightarrow\frac{\partial U}{\partial T_{O2}}=\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_d}=\frac{\partial U}{\partial T_d}-\mu+\tau=0\Leftrightarrow\frac{\partial U}{\partial T_d}=\mu-\tau$$

iii) La segunda condición señala que la utilidad de la última hora trabajada tiene que ser igual a la utilidad marginal del ocio menos la utilidad en término de consumo que reporta el salario.

La tercera y cuarta condición indica que la utilidad marginal de las dos actividades de ocio han de ser iguales. En otras palabras, el consumidor distribuye su tiempo de ocio entre las dos actividades a fin de maximizar la utilidad por ocio.

iv) Reordenando la condición de primer orden, tenemos $\frac{\tau}{\lambda}=\frac{\mu}{\lambda}-\frac{\overline{\frac{\partial U}{\partial T_d}}}{\lambda}$. El consumidor está dispuesto a pagar por reducir en una unidad de tiempo las labores domésticas el beneficio por disponer de mayor tiempo de ocio más el beneficio por reducir la realización de una actividad que genera una pérdida de utilidad.

v) $$\frac{\partial L}{\partial T_v}dT_v+\frac{\partial L}{\partial I}dI=0\Leftrightarrow\frac{dI}{dT_v}=\frac{\mu}{\lambda}-\frac{\frac{\partial U}{\partial T_v}}{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_e}dT_e+\frac{\partial L}{\partial I}dI=0\Leftrightarrow\frac{dI}{dT_e}=\frac{\mu}{\lambda}-\frac{\frac{\partial U}{\partial T_e}}{\lambda}$$

Dado que el tiempo de espera y el tiempo de viaje se suman en la función de utilidad, el valor subjetivo de ambos tiempos debe ser el mismo.

vi) Si la respectiva restricción no está activa, entonces $\frac{\partial L}{\partial T_d}=\frac{\partial U}{\partial T_d}-\mu=0\Leftrightarrow\frac{\partial U}{\partial T_d}=\mu$. Así, la actividad doméstica se transforma en una actividad de ocio.

4) Beneficio a usuario. Considere la siguiente función de utilidad indirecta sistemática: V(i) = alfa * C(i) + beta * Tv(i), C: costo, Tv: tiempo de viaje e i indexa a las alternativas de viaje. Suponga que una de las alternativas es el transporte público de buses y su tiempo de viaje depende de una variable *x*, tal que Tv_transporte público = Tv(*x*). (El tiempo de viaje en los demás modos de transporte no se ve afectado por la variable *x*.)

La ecuación del logsum (dividida por la utilidad marginal del ingreso) entrega una medida del excedente del consumidor. Demuestre a que resultado se llega como medida del cambio del excedente del consumidor si la variable *x* es reducida marginalmente. Además de la demostración matemática, explique el resultado obtenido.

La demostración será considerada bien resuelta si está desarrollada paso a paso. La existencia de algún paso intermedio que no se lea invalidará automáticamente la respuesta. (10% de la nota)

Ecuación del excedente del consumidor: $\frac{1}{\alpha}\left[\ln\left[\sum_i \exp(V_i)\right]\right]$. (Para resolver este ejercicio hay que manejar las propiedades y derivadas del número *e* y de la función logaritmo.)

Respuesta:

$$\frac{\partial\left[\frac{1}{\alpha}\left[\ln\left[\sum_i \exp(\alpha C_i + \beta Tv_i)\right]\right]\right]}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{(\alpha C_{Tr_Pub} + \beta Tv_{Tr_Pub})}}{\left[\sum_i \exp(\alpha C_i + \beta Tv_i)\right]}\frac{\beta dTv_{Tr_Pub}}{dx} = \Pr_{Tr_Pub}\frac{\beta}{\alpha}\frac{dTv_{Tr_Pub}}{dx}$$

Se pasa a la segunda ecuación puesto que la variable x solo afecta el tiempo de viaje del modo transporte público. El beneficio es igual al valor del tiempo de viaje (beta/alfa) multiplicado por la probabilidad de elección de transporte público (Pr_Tr_pub) multiplicado por el ahorro marginal en tiempo que genera la variable x (dTv / dx).

5) Valor Social del Tiempo. Suponga dos tipos de personas, de bajo ingreso y de alto ingreso. Considere los siguientes valores:

	Bajo ingreso	Alto ingreso
Beta_tiempo (utilidad por minuto)	-50	-50
Utilidad marginal del ingreso	1	0,25
Valor del tiempo (pesos por minuto)	$50	$200
π (aporte marginal impositivo)	0,2	0,8

i) Calcule el beneficio social de un proyecto que reduce el tiempo de viaje en 1 millón de minutos para persona de bajos ingresos bajo el enfoque $a_i \lambda_i = 1$, $\forall i$. Explique.
ii) Calcule el beneficio social de un proyecto que reduce el tiempo de viaje en 1 millón de minutos para persona de altos ingresos bajo el enfoque $a_i \lambda_i = 1$, $\forall i$. Explique.
iii) Calcule el beneficio social de un proyecto que reduce el tiempo de viaje en 1 millón de minutos para persona de bajos ingresos bajo el enfoque $a_i = 1$, $\forall i$. Explique.
iv) Calcule el beneficio social de un proyecto que reduce el tiempo de viaje en 1 millón de minutos para persona de altos ingresos bajo el enfoque $a_i = 1$, $\forall i$. Explique.

(10% de la nota)

Respuesta:
i) En este caso, el beneficio es $ 50 millones (= 1 millón x $50).
ii) El beneficio es $200 millones (= 1 millón x $200). En i) y ii) se multiplica el valor del tiempo de viaje por el total de minutos ahorrados.
iii) El beneficio es $ 125 millones {= 1 millón x $50 / (1 x 0,2 + 0,25 x 0, 8)}.
iv) El beneficio es $ 125 millones {= 1 millón x $40 / (1 x 0,2 + 0,25 x 0, 8)}. En tres y cuatro se aplica la ecuación (utilidad marginal del tiempo de viaje por el tiempo ahorrado dividido por la utilidad marginal social del ingreso).

6) Modelo de Comercio Interregional. Considere las regiones A y B. En ambas regiones se produce y consume un mismo bien q en condiciones de competencia perfecta. Existe transporte entre ambas regiones realizado por empresas en condiciones de competencia perfecta, a costo marginal constante e igual a *c*. A partir del presente año, la región exportadora decide colocar un impuesto a la exportación, con lo que el costo de importar pasa a ser igual al costo de transporte (*c*) más el impuesto a la exportación (*i*). Muestre gráficamente el cambio en los beneficios de productores y consumidores. Este análisis gráfico debe hacerlo considerando el mercado de transporte y el mercado del bien q en ambas localidades. Su análisis debe proceder en cuatro pasos:

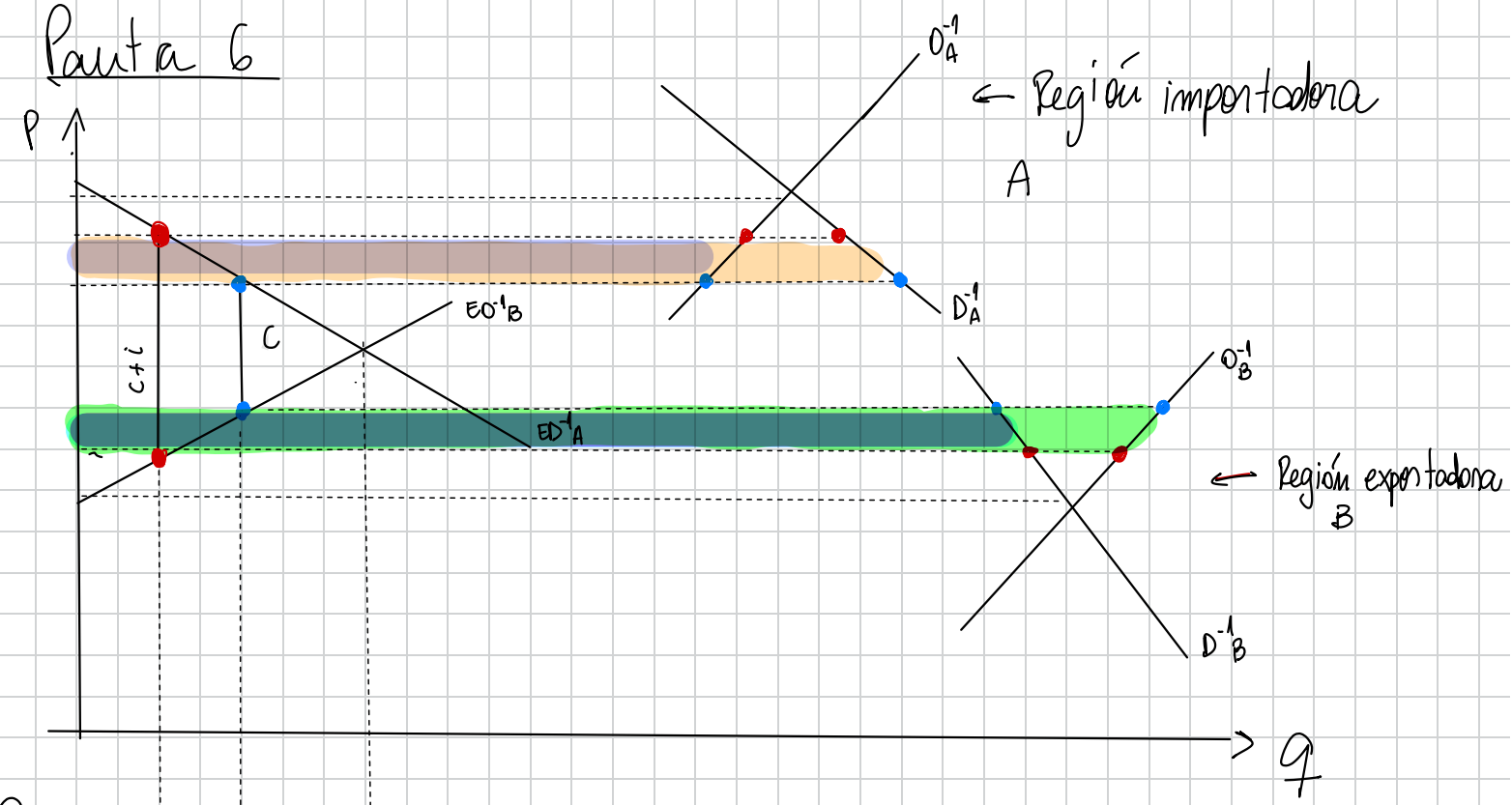
i) El consumo y la producción del bien q en las regiones A y B y el equilibrio en el mercado de transporte en la situación previa, sin impuesto a la exportación. (0,30)

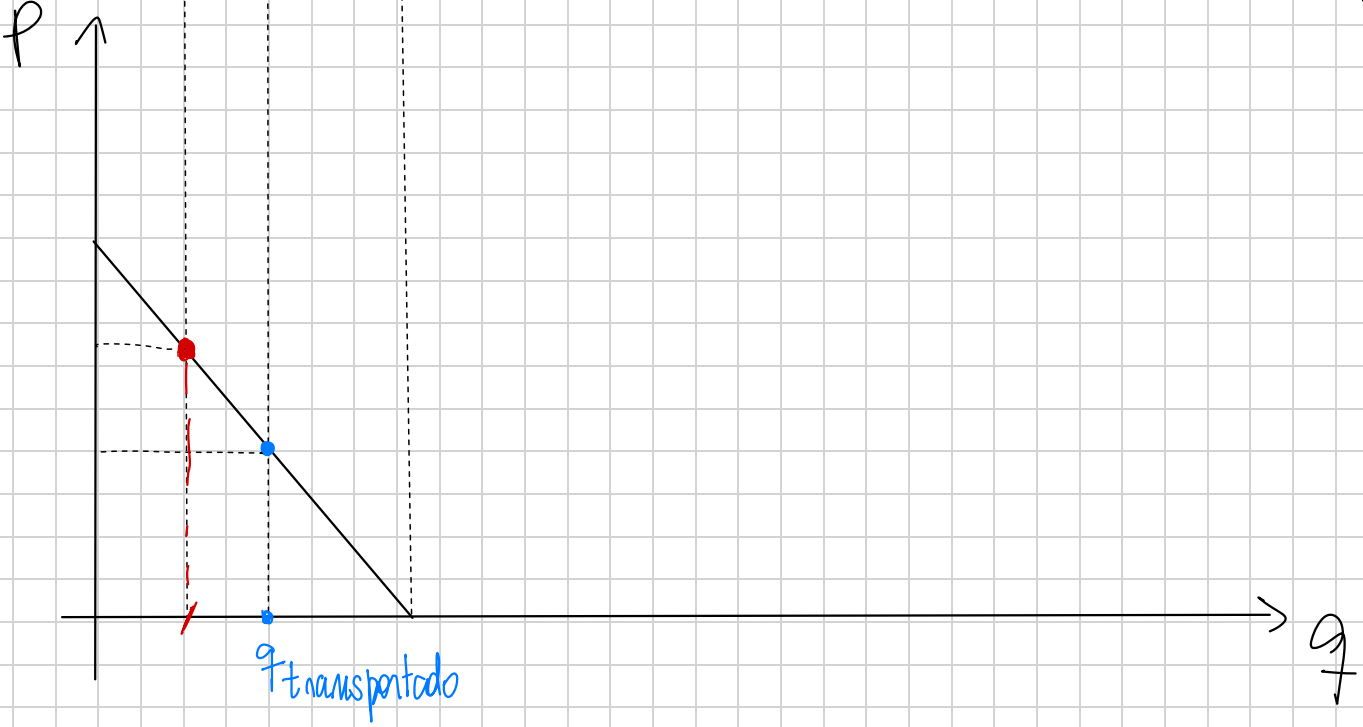
ii) El consumo y la producción del bien q en las regiones A y B y el equilibrio en el mercado de transporte en la situación posterior, con impuesto a la exportación. (0,30)
iii) El cambio en los excedentes del consumidor y el excedente del productor en ambos mercados producto de la introducción del impuesto a la exportación. (0,25)
iv) Entregue un argumento basado en el uso de ponderadores sociales visto en clase, para justificar por qué el gobierno de la región exportadora decidiría establecer un impuesto a la exportación. (0,15)

IMPORTANTE: i) todos los elementos de su gráfico deben tener su respectiva notación y esta estar aclarada; ii) provea de manera textual las explicaciones necesarias para que su análisis gráfico se entienda; iii) sea prolijo con sus gráficos. (20% de la nota)

Respuesta:

Pauta 6


P
O_A^{-1}
← Región importadora
A
D_A^{-1}
EO^{-1}_B
C
c + i
ED^{-1}_A
O_B^{-1}
← Región exportadora
B
D^{-1}_B
q


P
q
$q_{transportado}$

i) Debe identificar los puntos de Equilibrio en:

- curvas D^{-1} y O^{-1} de en A (región importadora) y B (exportadora)
- En las curvas de ED^{-1} y EO^{-1}
- En el mercado de Transportes

ii) Idem, en rojo

iii) Deben graficar:

i) En la región exportadora:

Los excedentes de consumidores aumenta en

Consecuencia de la reducción del precio

" " productores disminuye

ii) En la región importadora pasa al revés

Excedentes consumidores cae y el de productores aumenta

d) Si se suman el excedente del productor al excedente del consumidor, significa que se están utilizando ponderadores sociales igual a $\frac{1}{\lambda}$ tanto para productores como para consumidores. Con estos ponderadores, el impuesta a la exportación lleva a una pérdida de bienestar social en el mercado exportador. Por otro lado, se podrían utilizar ponderadores sociales diferentes donde aumente en términos relativos el ponderador social de los consumidores y en ese caso, podría ser que el impuesto genere un aumento

de bienestar social.